إحياء أصول إقليدس

إحياء أصول إقليدس

هذا الكتاب ترجمة لكتاب **Euclid's 'Elements' Redux**. يمكنكم الوصول للنسخة الإنجليزية عبر الرابط
https://archive.org/details/euclid-elements-redux_201809

رخصة النسخة الانجليزية:

©2020 Daniel Callahan, licensed under the Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License. (CC BY SA 4.0)

إنتاج: مبادرة " الكتب المفتوحة بالعربي".

رخصة الترجمة: (CC BY SA 4.0)

للتطوع معنا أو إرسال قضاياكم أو تعديلاتكم برجاء التواصل عن طريق الإيميل:
openbooksinarabic@gmail.com

جميع كتبنا على GitHub
/https://github.com/OpenbooksInArabic

صفحة الفيسبوك:
/https://www.facebook.com/OpenBooksInArabic

قائمة القائمين على الترجمة:
المترجم: مصطفى شاهين (moustafashahin122@outlook.com)

قائمة المساهمين: (تضم هذه القائمة كل من ساعدنا على تحسين الترجمة باكتشاف الأخطاء على سبيل المثال).

1.

" لا تقرأه فقط؛ حاربه! اطرح أسئلتك، وألّف أمثلة جديدة، واكتشف البراهين الخاصة بك. هل الفرضية ضرورية؟ هل العكس صحيح؟ ماذا يحدث في الحالة الخاصة الكلاسيكية؟ ماذا عن الحالات المتطرفة؟ أين يستخدم الاثبات الفرضية؟ "

بول هالموس

"الرياضيات البحتة، بطريقتها، شعر الأفكار المنطقية."

ألبرت أينشتاين

"الرياضيات كالذهاب إلى صالة الألعاب الرياضية، ولكن لعقلك. إنها تشحذ العقل ".

دانيكا ماكيلار

"أحد الجوانب الجذابة جدًا للرياضيات هو أن تناقضاتها الشائكة تزهر نظريات جميلة."

فيليب ج. ديفيس

الرياضيات انضباط، أي أنك تنافس نفسك. إذا واصلت التحسن، فأنت عالم رياضيات.

جدول المحتويات

الفصل 0 1

عن هذا المشروع 1

تكريس الكتاب 3

من يحتاج إلى إصدار جديد من أصول إقليدس؟ 3

لماذا نعيد كتابة أصول إقليدس؟ 3

القراءة الموصى بها 5

الفصل 1 7

الزوايا والخطوط المتوازية ومتوازيات الأضلاع 7

1-1 الرموز والمنطق والتعريفات 7

2-1 المسلمات 17

3-1 موضوعات 17

4-1 الكتاب الأول، القضايا 1-26 22

5-1 الكتاب الأول، القضايا 27-48 64

أسئلة الامتحان على الفصل الأول. 101

تمارين الفصل 1. 102

الفصل 3 105

الدوائر 105

1-3 التعريفات 105

2-3 قضايا من الكتاب الثالث 110

أسئلة الامتحان للفصل 3. 170

تمارين الفصل 3 171

الفصل 4 174

الفصل 6 174

الفصل 0
عن هذا المشروع

الهدف من هذا الكتاب هو توفير نسخة من أصول إقليدس سهلة القراءة وغير مكلفة وأصدرت بموجب ترخيص الثقافة المفتوحة.

يشير عنوان إحياء أصول إقليدس إلى أنه: في حين أن هذه الطبعة تذكر نتائج إقليدس وتثبتها، إلا أنه أعيد كتابة الإثباتات باستخدام الرياضيات الحديثة. هذا لأن الرياضيات قد تغيرت بالكامل، تقريبًا، منذ نشر الأصول عام 300 ق.م.

في الثقافة الهلنستية لإقليدس، كان الرقم مرادفًا لطول يمكن قياسه. أعطى هذا لإقليدس إمكانية الوصول إلى جميع الأرقام الموجبة، ولكنه لم يصل بهذا إلى الصفر ولا الأرقام السالبة. ولكن، بما أن علم الجبر لن يُبتكر قبل ألفية أخرى، لم يعرف إقليدس أن نتيجة الكتاب الأول، القضية 47 يمكن تلخيصها في المعادلة $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$.

عندما يواجه طالب حديث الأصول الأصلية أول مرة، فإنه يواجه مشكلتين: منطق الإثبات، ومفهوم إقليدس القديم للأرقام. يُحدِّث هذا الإصدار براهين إقليدس مع الاحتفاظ بنتائجه الأساسية.

قد يكون من المستحيل المبالغة في تقدير مدى أهمية هذه النتائج في الرياضيات. إنها السبب الرئيس أن الأصول كانت أهم كتاب للرياضيات في العالم لحوالي 2200 عام.

خذ بعض الوقت لاستيعاب هذا الرقم... استُخدم كتاب للرياضيات من قبل الكثير من المتعلمين لأكثر من ألفي عام. لماذا؟ قلة المنافسة؟ في أوقات وأماكن معينة، نعم، ولكن في المدارس، التي حصلت فيها أصول إقليدس على موطئ قدم، سرعان ما اتُبعت كتب أخرى. لذلك، لا يمكن أن تكون هذه هي الإجابة الكاملة.

البراهين البارعة؟ بينما تظل أصول إقليدس نموذجًا لكيفية كتابة البراهين، إلا أنه يمكن الاستغناء عنها.

المحتوى؟ حتى ابتكار الجبر وحساب التفاضل والتكامل، غطت الأصول كل شيء يحتاج عالم الرياضيات المبتدئ إلى معرفته. وحتى بعد ظهور حساب التفاضل والتكامل، ظلت الأصول في مكانها. ادعى مساعد إسحاق نيوتن أنه، خلال خمس سنوات من الخدمة، سمع نيوتن يضحك مرة واحدة فقط: سأل أحد الطلاب عما إذا كانت أصول إقليدس لا تزال مهمة، وسخر نيوتن منه. لكن معظم الطلاب درسوا الكتب الستة الأولى فقط (أي المخطوطات الستة الأولى من الثلاثة عشر مخطوطة التي تتكون منها الأصول الأصلية). لذلك، لم يدرس الجميع الأصول، حصريًا، لمحتواها.

لذلك، يجب أن يكون كل ما هو قيم في الأصول موجودًا في النصف الأول، لكن كل كتاب يبدأ بأساس (تعريفات وموضوعات) ويَبني عليه قضايا.

أعتقد أن هذا مفتاح السؤال: لا تساعد الأصول الطالب على تعلم الهندسة وحسب، بل إنها تغمر الطالب أيضًا في نظام منطقي مفيد بقدر ما هو ثاقب. بينما يساعد تعلم الجبر الطالب على إجراء حساب التفاضل والتكامل والإحصاء، فإن تعلم البراهين الهندسية من الأصول يساعد الطالب على التفكير السليم في السياسة والفن والموسيقى والتصميم والبرمجة والقانون ... يمكن فهم أي موضوع يتطلب تفكيرًا عقلانيًا بصورةً أفضل بعد إقليدس.

سبب الحاجة إلى الأصول في الماضي، وسبب الحاجة إليها اليوم، هو أنها تساعد القراء على تعلم التفكير المنطقي.

لكن إذا كانت الأصول كتابًا جيدًا، فلماذا تم التخلي عنها في نهاية القرن التاسع عشر؟

واجهت الرياضيات أزمة في النصف الأخير من ذلك القرن؛ أدت التعريفات الغامضة والمنطق الغامض إلى تناقضات خطيرة. دون إصلاح شامل للتعريفات وبناء المنطق الصوري، كانت الرياضيات ستنهار.

بعد عدة عقود من العمل من قبل العديد من العقول اللامعة، تم الانتهاء من الإصلاح الشامل، مما أدى إلى عصر ذهبي رياضي لا يزال يتكشف. لكن هذا الإصلاح الشامل أوضح نقاط ضعف إقليدس: فبينما ظل منطقه سليمًا، كان عرض هذا المنطق قديمًا. كانت تعريفات وافتراضات إقليدس غامضة لدرجة أنها غير عملية. الأكثر خطورة، أنه تم تطوير هندسات أخرى، مما يثبت أن عمل إقليدس لم يكن فريدًا.

مع غدو حساب التفاضل والتكامل أساس الهندسة والعلوم، أصبح متطلبه المسبق، الجبر، دورة متطلبة من كل طالب. أصبحت البراهين الهندسية رفاهية وليست ضرورة. مع الإدراك المتأخر تمامًا، يكون الخطأ واضحًا. إجبار كل طالب على تعلم الجبر لم ينجح إلا في تعليم الطلاب كراهية "الرياضيات" (التي يربطها ملايين الأشخاص حصريًا بالجبر) ويعيق محاولاتهم للتفكير المنطقي.

الطريق إلى الأمام واضح أيضًا - إما إعادة كتابة الأصول أو تطوير عمل جديد مكافئ. لقد اخترت إعادة كتابة أصول إقليدس على أمل أن تكون الأصول، مرة أخرى، الكتاب التمهيدي للهندسة المبنية على موضوعات، ونموذج على كتابة البراهين، ودراسة حالة للمنطق التطبيقي.

مثل جميع كتب الرياضيات، يتطلب إحياء "أصول" إقليدس من الطالب العمل بتأن وبعناية خلال دراسة كل جزء. يجب على الطالب التأكد من كل نتيجة وعدم تصديق شيء عن إيمان فقط. في حين أن هذه العملية قد تبدو مملة، إلا أن هذا الاهتمام بالتفاصيل، هو بالضبط ما يفصل أولئك الذين يفهمون الرياضيات عن أولئك الذين لا يفهمونها.

يحتوي هذا الإصدار أيضًا على مسائل للواجبات المنزلية ومفتاح إجابة جزئي. ومع ذلك، لا توجد متطلبات مسبقة مطلوبة إذا كان هدف الطالب قراءة وفهم المادة. أفضل طريقة لإثبات هذا الفهم هي معرفة عدد معين من البراهين ثم ذكرها عند الطلب. كانت هذه الطريقة التي استخدمها أبراهام لنكولن:

> خلال دراستي للقانون، كنت أقابل باستمرار كلمة "توضيح". اعتقدت في البداية أنني فهمت معناها، لكن سرعان ما اقتنعت أنني لم أفهم. قلت لنفسي، "ماذا أعني عندما أوضح أكثر مما أعنيه عندما أفكر أو أثبت؟ كيف يختلف التوضيح عن أي اثبات آخر؟ " ... لقد راجعت كل القواميس والمراجع التي استطعت أن أجدها، لكن دون نتائج. أخيرًا قلت، "لنكولن، لا يمكنك أبدًا أن تكون محامً إذا كنت لا تفهم ما يعنيه التوضيح؛" وتركت المكان في سبرينغفيلد، وذهبت إلى منزل والدي، وبقيت هناك حتى أتمكن من ذكر أي قضية من الكتب الستة لإقليدس عن ظهر قلب. ثم اكتشفت ما يعنيه "التوضيح"، وعدت إلى دراساتي للقانون.

إذا كان الطالب ينوي إثبات بعض المسائل، فستكون النسب والجبر وحساب المثلثات وربما الجبر الخطي مفيدة. يجب على الطلاب الذين ليس لديهم معرفة بكتابة الاثباتات الرجوع إلى "كتاب الإثبات" لريتشارد هاماك، الطبعة الثالثة.

من المهم أن نفهم أن الرياضيات كما يراها علماء الرياضيات: هي مجموعة من العبارات حول العلاقات، بين الكميات، التي يمكن إثباتها. دون إثباتات، لا يوجد رياضيات.

https://www.people.vcu.edu/~rhammack/BookOfProof/

تكريس الكتاب

هذا الكتاب مكرس لكل فرد في المجتمع التعليمي يعتقد أن الجبر يوفر مقدمة أفضل للرياضيات من الهندسة.

من يحتاج إلى إصدار جديد من أصول إقليدس؟

فكر في سؤال آخر: من يحتاج إلى عجلات تدريب لركوب الدراجات؟

شخص لا يعرف كيف يركب دراجة.

قد لا يحتاج علماء الرياضيات المتمرسون إلى أصول إقليدس، لكن بناء الأصول للأفكار المعقدة من الموضوعات البسيطة يظل نموذجًا لكيفية نهج الرياضيات. سيجد الطلاب الذين يحاولون إتقان أصول إقليدس أن الرياضيات في القرن الحادي والعشرين أقل إرباكًا، على الرغم من تعريفات إقليدس الأقل صرامة.

لماذا نعيد كتابة أصول إقليدس؟

تعود فكرة أن أصول إقليدس تحتاج بعض التغيير والتبديل إلى زمن بعيد. عدت القضية 40 في الكتاب الأول حشو، بالإضافة إلى العديد من توطئات ولازمات الأصول.

من المهم أن ندرك أنه لا يوجد كتاب رياضيات مثالي؛ ستظهر العيوب حتمًا بعد قرون من الدراسة الدقيقة من قبل العقول الذكية.

ولكن من المهم أيضًا إدراك وجود أكثر من هندسة صحيحة؛ هندسة إقليدس واحدة من العديد من الهندسات (ولكن، ربما، أسهل في التعلم). وبالمثل، بالنسبة لأي نتيجة صحيحة ومنطقية، يوجد أكثر من إثبات أو يوجد احتمال وجود أكثر من إثبات. لا يلزم التعامل مع براهين إقليدس بأسلوب خاص لمجرد أنها "أصلية".

هناك سببان على الأقل لهذا: أولاً، يجب أن يسأل طالب الرياضيات دائمًا عما إذا كانت هناك طريقة أخرى لإثبات مبرهنة مثيرة للاهتمام. يوفر ذلك رؤى، إن لم يساعد في توليد نتيجة جديدة. ثانيًا، من المشكوك فيه أن إقليدس (إذا كان فعلًا فردًا واحدًا) هو المؤلف الوحيد لهذه البراهين. من الأرجح أنه (أو علماء مدرسته) جمّع وأعاد كتابة هذه البراهين من مصادر مختلفة. تُعد إعادة الكتابة والتحرير جزءًا من عمل عالم رياضيات.

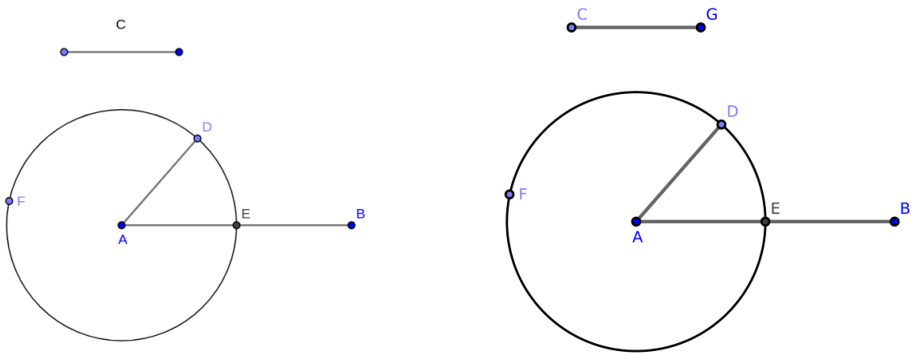
هذا لا يعني تشويه سمعة "الأصول" - ربما كانت الكتب الثلاثة عشر الأصلية هي أول كتاب يوضح كيفية بناء مئات الهياكل المعقدة بدءًا من مبادئ أولى. تتبع جميع كتب الرياضيات والفيزياء والهندسة المكتوبة جيدًا، تقريبًا، تنسيقًا مشابهًا (وجميع الكتب السيئة لا تتبع).

ولكن لا يزال الحال أن البراهين الأصلية لإقليدس قد عفا عليها الزمن - فهي تشير إلى مفهوم للرياضيات لم يعد قابلاً للتطبيق؛ لأنه لا يمكن توسيعه لإنتاج تحليل حقيقي، أو تحليل مركب، إلخ. لرؤية هذا، ضع في اعتبارك إثبات إقليدس الأصلي لـ [1.3]:

الكتاب الأول القضية 3: لأي خطين مستقيمين غير متساويين، اقطع من الخط المستقيم الأكبر ما يساوي الأصغر.

الإثبات لنفترض أن AB و C هما الخطان المستقيمان غير المتساويين، بشرط أن الأكبر AB. يجب قطع خط مستقيم يساوي C الأصغر من AB الأكبر.

لنفترض أن الخط AD، الذي يساوي الخط المستقيم C، قد وُضِع عند النقطة A. وافترض رسم الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها AD.



الشكل 0-4-1: الكتاب الأول، القضية 3 (الأصل على اليسار، والمعاد كتابتها على اليمين)

وبما أن النقطة A مركز الدائرة DEF، فإن AE يساوي AD. لكن C يساوي أيضًا AD. وبالتالي، فإن كل من AE و C يساوى AD. إذًا AE تساوي C.

وهكذا، لاثنين من الخطوط المستقيمة غير المتساوية، AB و C، تم قطع (الخط المستقيم) AE، الذي يساوي C الأصغر، من AB الأكبر. وهو المطلوب إثباته.

قارن الأصل بالإثبات المعاد كتابته أدناه:

لأي قطعتين غير متساويتين في الطول، من الممكن تقسيم القطعة الأكبر بحيث يكون أحد الجزأين مساويًا في الطول للقطعة الأصغر.

الإثبات: أَنْشِئ القطعتين $\overline{AB}$ و$\overline{CG}$ بشرط أن $\overline{CG} < \overline{AB}$. ندعي أنه يمكن تقسيم $\overline{AB}$ إلى القطعتين $\overline{AE}$ و $\overline{EB}$ حيث $AE = CG$.

من النقطة A، أنشئ القطعة AD بشرط أن $AD = CG$ [1.2]. أنشئ الدائرة A● التي مركزها A ونصف قطرها $\overline{AD}$ [مسلمة 1.3] التي تتقاطع مع $\overline{AB}$ عند E.

لأن A مركز A●، $AE = AD$ [تعريف 1.32] لأن $AD = CG$ (حسب الإنشاء)، حسب الموضوعة 9 من القسم 1.3.1 (باستخدام المعادلات)، نجد أن $AE = CG$، مما يثبت ادعاءنا.

القراءة الموصى بها

كتاب الإثبات (Book of Proof)، الطبعة الثالثة، ريتشارد هاماك.

يقدم هذا الكتاب المفتوح مقدمة للطرق القياسية لإثبات المبرهنات الرياضية. يمكن اعتباره مجلدًا مصاحبًا لأي إصدار لإقليدس، خاصة لأولئك الذين يتعلمون كيفية قراءة وكتابة البراهين الرياضية أول مرة. تمت الموافقة عليه من قبل مبادرة الكتاب المفتوح التابعة للمعهد الأمريكي للرياضيات ولديه عدد من المراجعات الجيدة في الرابطة الرياضية الأمريكية DL Math وعلى أمازون.
http://www.people.vcu.edu/~rhammack/BookOfProof/index.html

أصول إقليدس على الإنترنت، تمت برمجتها والمحافظة عليها بواسطة ديفيد إي جويس
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

إرشادات للكتابة الرياضية الجيدة، فرانسيس إدوارد سو
https://www.math.hmc.edu/~su/math131/good-math-writing.pdf

كيف تحلها (How to Solve it)، جورج بوليا

" أفضل الكتب مبيعًا لعالم الرياضيات البارز جي بوليا، **كيف تحلها**، سيُظهر لأي شخص في أي مجال كيف يفكر بطريقة صحيحة. في نص واضح وجذاب، يكشف بوليا كيف يمكن للطريقة الرياضية لوضع إثبات أو إيجاد مجهول، أن تساعد في معالجة أي مشكلة منطقية. لقد استمتعت أجيال من القراء بتعليمات بوليا الذكية - والرائعة حقًا - بشأن تجريد الأمور غير المهمة والذهاب مباشرة إلى قلب المشكلة ".
http://www.amazon.com/How-Solve-Mathematical-Princeton-Science/dp/ 069116407X

ملك الفضاء اللامتناهي: إقليدس وأصوله، ديفيد بيرلينسكي

ليس إصدارًا من أصول إقليدس، ولكنه شرح للأصول نفسها، مما يجعل العمل ثوريًا.
https://www.amazon.com/King-Infinite-Space-Euclid-Elements-ebook/dp/B00HTQ320S

مرجع الرياضيات المفتوح
http://www.mathopenref.com
http://www.mathopenref.com/trianglecenters.html

الفصل 1

الزوايا والخطوط المتوازية ومتوازيات الأضلاع

يجب على الدارسين إنشاء الأشكال ودراسة الإثباتات خطوة بخطوة. هذا عنصر أساسي في عملية التعلم لا يمكن تجنبه. قديمًا قالوا، "لا يوجد طريق ملكي للهندسة"، أي: "لا أحد يتعلم الرياضيات دون تعب".

1-1 الرموز والمنطق والتعريفات

يُشار إلى قضايا إقليدس- في الكتاب- بين حاصرتين [ ]؛ على سبيل المثال، تُكتب [3-32]، للإشارة إلى القضية الثانية والثلاثون في الفصل الثالث، بدلاً من كتابة "القضية 3-32". الموضوعات والتعريفات وما إلى ذلك، يُشار إليها أيضًا بطريقة مماثلة؛ على سبيل المثال، التعريف 12 في الفصل 1 يُكتب بالشكل التالي: [تعريف 1-12]. التمارين يُشار إليها بالطريقة التالية: [3-5، 1#] بدلاً من التمرين 1 للقضية 3-5.

سيُشار إلى المعادلات المرقمة بـ (10-2-2) بدلاً من المعادلة الثانية في الفصل 10، الجزء 2.

ملاحظة على التمارين: حل بعضها ولا تشعر بأن عليك حلها جميعًا. عمومًا، من المتوقع حل التمارين باستخدام القضايا واللازمات والتمارين التي سبقته. على سبيل المثال، يجب تجربة التمرين [1-32، 3#]، أولاً، باستخدام القضايا من [1-1] إلى [1-32] بالإضافة إلى جميع التمارين السابقة. إذا ثبت أن هذا صعب أو محبط للغاية، فعليك أن تفكر إذا كانت القضية [1-33] أو اللاحقات لها (وتمارينها) قد تساعد في حل التمرين. يجوز أيضًا استخدام حساب المثلثات أو الجبر الخطي أو أي تقنيات رياضية معاصرة أخرى في حل المسائل الصعبة.

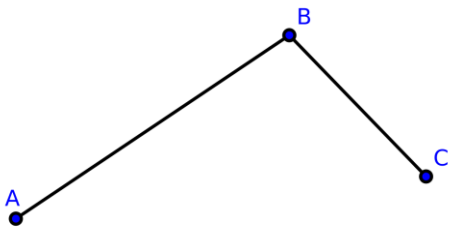
1-1-1 الرموز التي ستحتاجها لقراءة الكتاب

ستُستخدم الرموز التالية للإشارة إلى الأشكال أو العلاقات الهندسية القياسية:

- الدوائر سيُشار إليه بالرمز:●. علي سبيل المثال سنشير إلى الدائرة التي مركزها A بالرمز A●. إذا لم يكن المركز معلومًا، سيُشار إلى الدائرة بثلاث نقاط على محيطها، مثل ABC●.
- المثلثات سيُشار إليه بالرمز: ▲
- متوازيات الأضلاع سيُشار إليه بالرمز: ▰
- الخطان المتوازيان سيُشار إليهما بالرمز: //
- الخطان المتعامدان سيُشار إليهما بالرمز: ⊥

بالإضافة إلى ذلك، ستُستخدم الرموز المعتادة في الجبر: +، −، =، <، >، ≤، ≥، ≠، بجانب بعض الرموز الإضافية:

- **التركيب** ⊕ Composition: على سبيل المثال، افترض أن لدينا القطعتين $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ اللتين يتقاطعان عند النقطة B. العبارة AB + BC تُشير إلى مجموع طوليهما، ولكن $\overline{AB} \oplus \overline{BC}$ تشير إلى تركيبهما ككائن. انظر الشكل 1-1-1.



الشكل 1-1-1: التركيب: الكائن الهندسي $\overline{AB} \oplus \overline{BC}$ يتكون من القطعتين، $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$.

فيما يخص الزوايا، يمكن الإشارة إلى تركيبها باستخدام إما الرمز + أو ⊕. في هذا الكتاب، سيُستخدم الرمز +.

• التشابه: ~ يتشابه شكلان أو كائنان إذا كان لهما نفس الشكل. ولكن ليس، بالضرورة، نفس الحجم. إذا تشابه كائنان وكان لهما نفس الحجم، فإنهما يتطابقان أيضًا.

• التطابق: ≅ يتطابق شكلان أو كائنان إذا كان لهما نفس الشكل والحجم، أو إذا كان لأحدهما نفس الشكل والحجم للصورة المعكوسة للآخر. هذا يعني أنه يمكن وضع أحدهما على الآخر (يسمح بعكس وقلب الشكل) بحيث ينطبقان، دون تغيير حجمهما.

2-1-1 المنطق الذي ستحتاجه لقراءة الكتاب

القضايا Propositions هي عبارات رياضية إما أن تكون صحيحة تمامًا أو خاطئة تمامًا، ولا يمكن أن تكون صحيحة وخاطئة معًا. بعض الأمثلة والأمثلة المضادة:

• "المثلث له ضلعان" قضية خاطئة.

• "المثلث له ثلاثة أضلاع" قضية صحيحة.

• "المثلث له ثلاثة أضلاع؟ " ليست قضية، إنها سؤال.

• "ارسم مثلث!" ليست قضية؛ إنها أمر.

يمكن تقسيم القضايا الصحيحة إلى موضوعات ومبرهنات. لا تحتاج الموضوعة إلى إثبات، وتتطلب المبرهنة إثباتًا، على الأقل؛ كل من الموضوعات والمبرهنات تُعتبر صحيحة. القضية التي لا يمكن إثبات صحتها ليست موضوعة ولا مبرهنة وتعد خاطئة. (حرق صغير: كل القضايا الواردة في هذا الكتاب صحيحة)

الموضوعة axiom هي قضية يُفترض أنها صحيحة دون إثبات. تُعد أساسيةً لدرجة أنه لا يمكن استنتاجها من أي قضية أكثر بدائيةً. قد تكون عبارة "أي ضلعين في المثلث أكبر من الضلع الثالث" أمرًا بديهيًا؛ ومع ذلك، فهي ليست موضوعة حيث يمكن اثباتها باستخدام القضايا الأخرى. العبارة "الكائنان المساويان لكائن ثالث متساويان مع بعضهما البعض " عبارة بديهية ولا يمكن استنتاجها من أي قضية أكثر بديهيةً، لذا، فهي تعد موضوعة.

المبرهنة theorem هي قضية يمكن إثباتها من قضايا معروفة (إما مبرهنات أو موضوعات). يمكن أيضًا وصف المبرهنات بأنها عبارات رمزية للخصائص الرياضية أو المنطقية.

الإثبات proof هو حجة رياضية صارمة توضح، بما لا لبس فيها، حقيقة قضية معينة. يتكون الإثبات من ثلاثة أجزاء: الفرضية، التي نفترضها، والادعاء، هو ما ينوي المؤلف إثباته، والجزء الأكبر من الإثبات هو الذي يوضح أن الادعاء صحيح بمجرد افتراض صحة الفرضية.

اللازمة Corollary هي استدلال أو استنتاج مبني على أساس مبرهنة، تنص عادةً على نتيجة صغيرة، لكنها مهمة، تُستنتج مباشرةً من الإثبات نفسه أو من نتيجة المبرهنة. على سبيل المثال، إذا كانت المبرهنة تنص على أن الجذور التربيعية للأعداد الأولية غير نسبية، إذًا إحدى اللازمات لهذه المبرهنة هي أن $\sqrt{2}$ غير نسبي.

التوطئة lemma هي مبرهنة تُستخدم كنقطة انطلاق لنتيجة أكبر وليست عبارة مهمة في حد ذاتها. بالرغم من أن جميع التوطئات- من الناحية الفنية- مبرهنات، لا تُسمى التوطئات مبرهنات؛ من أجل إيصال الفكرة القائلة بأنها ذات أهمية ضئيلة وموجودة للمساعدة في إثبات شيء أعمق.

1-1-2-1 أمثلة

قضية. (1) إذا كان x عددًا نسبيًا، فإن x له مفكوك عشري.

الفرضية " x عدد نسبي"، والادعاء "x له مفكوك عشري" (أي يمكن كتابته في صورة عدد عشري). لإثبات أن هذه القضية مبرهنة، نبدأ بافتراض أن x عدد نسبي. بعدها، يجب أن نظهر باستخدام المنطق أن x له مفكوك عشري. إذا تمكننا من ذلك، فقد أثبتنا ادعاءنا، وحولنا هذه القضية إلى مبرهنة.

العبارات المقلوبة converse statements: إذا أعدنا كتابة القضية أعلاه بتبديل الفرضية والادعاء، فإننا نحصل على عبارتها المقلوبة:

قضية. (2) إذا كان لـ x مفكوك عشري، فإن x عدد نسبي.

لأن هذه القضية خاطئة، ليس لها إثبات وبالتالي ليست مبرهنة.

ليس هناك ما يضمن أن مقلوب قضية معينة صحيحًا.

من القضيتين (1) و (2)، من الممكن الحصول على قضيتين أخريين هما مكافئتاهما العكسيتين. المكافئة العكسية للقضية (1) هي قضية (3):

قضية (3) إذا لم يكن لـ x مفكوك عشري، فإن x ليس عددًا نسبيًا.

المكافئة العكسية للقضية (2):

قضية (4) إذا لم يكن x عددًا نسبيًا، فإن x ليس له مفكوك عشري.

على عكس القضايا المقلوبة، يكون المكافئ العكسي صحيحًا فقط، إذا كانت القضية، الأصلية، صحيحة. بما أن (1) صحيحة، إذًا (3) صحيحة؛ بما أن (3) صحيحة، إذًا (1) صحيحة. وبالمثل، فإن المكافئ العكسي لقضية يكون خاطئًا، فقط، إذًا كانت القضية الأصلية خاطئة: بما أن (2) خاطئة، إذًا (4) خاطئة؛ بما أن (4) خاطئة، إذًا (2) خاطئة.

1-1-3 التعريفات

نحتاج إلى لغة مشتركة لمناقشة الخبرات أو الأفكار المتشابهة. فيما يخص الرياضيات، هذا صحيح جدًا. عمل عالم الرياضيات عديم الفائدة، إذا كانت التعريفات التي يستخدمها غامضة.

قد يرغب الطلاب الذين يقرؤون هذا الجزء أول مرة في قراءة التعريفات 1 إلى 6 و9 إلى 11 ثم الانتقال إلى [1-4]، والعودة إلى التعريفات المتبقية بالإضافة إلى [1-2] و [1-3] حسب الحاجة.

النقطة

1- **النقطة** هي كائن صفري الأبعاد. المجسم هو الكائن الهندسي الذي له ثلاثة أبعاد (الطول والارتفاع والعرض). السطح هو الكائن الهندسي ذو بعدين، والخط أو القطعة من الخط هي الكائن الهندسي الذي له بعد فقط. لأن النقطة لا تحتوي على أي من هذه، فإن أبعادها صفر.

الخط

2- **الخط** هو كائن ذو بعد واحد: له طول فقط، على سبيل المثال. إذا كان له ارتفاع أو عرض، مهما كان صغيراً، فسيكون له بعدان. لذا، فإن الخط ليس له ارتفاع أو عرض.

الخط الذي يحتوي على النقطتين A و B يكتب $\overleftrightarrow{AB}$.

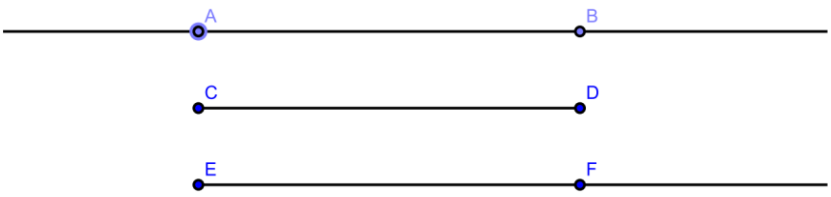
(يتوافق هذا التعريف مع تعريف إقليدس الأصلي حيث لا يلزم أن يكون الخط مستقيمًا. ومع ذلك، في جميع نصوص الهندسة الحديثة، من المفهوم أن "الخط" يكون دون أي إنحناء؛ أي مستقيم. راجع أيضًا [تعريف 1-4].)

3- الخطوط تتقاطع في نقاط. ومع ذلك، قد توجد نقطة دون أن تكون تقاطعًا لخطين.

4- يسمى الخط دون أي انحناء بالخط المستقيم. في هذا الكتاب تشير كلمة الخط حصريًا إلى الخط المستقيم. لن يُشار إلى الخط المنحني (مثل محيط الدائرة) بـ "خط" لتجنب الالتباس. الخطوط ليس لها نهاية؛ لأنها لانهائية الطول.

قطعة الخط (أو ببساطة القطعة) مشابهة للخط ما عدا أنها محدودة الطول ولها نهايتان (طرفيها). قطعة الخط ذات النهايتين A و B تكتب $\overline{AB}$. (للتعبير عن طول أي قطعة، سنهمل الخط العلوي. على سبيل المثال، AB هو طول القطعة $\overline{AB}$.)

الشعاع يشبه الخط بسبب طوله اللانهائي؛ إلا أن له نهاية واحدة. الشعاع الذي له النهاية A والنقطة B يكتب على الشكل $\overrightarrow{AB}$ (حيث A هي نهايته).



الشكل 1-1-2: [تعريف 1-2، 1-3، 1-4] $\overleftrightarrow{AB}$ خط، $\overline{CD}$ قطعة، و $\overrightarrow{EF}$ شعاع

المستوى

5- السطح له بعدين.

6- المستوى هو سطح يمتد إلى ما لا نهاية ويُفترض أن يكون مستوي أو مسطحًا تمامًا. المستوى هو النظير ثنائي الأبعاد للنقطة (صفرية البعد) والخط (أحادي البعد) والفضاء ثلاثي الأبعاد. معظم الهندسة الإقليدية تكون في مستويات؛ أي أن "المستوى" يشير إلى الحيز الذي تُجرى فيها الهندسة ثنائية الأبعاد.

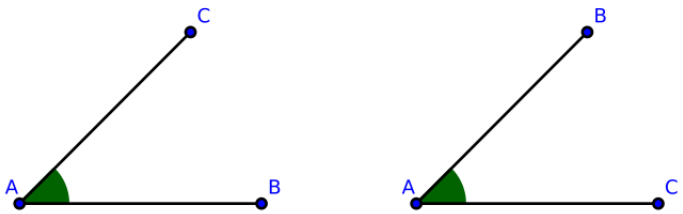
تُحدد المستويات بثلاث نقاط؛ لأي نقاط ثلاث ليست على نفس الخط، يوجد مستوى واحد فقط يحتوي على جميع النقاط الثلاثة.

7- الشكل **المستوي** هو أي مجموعة من النقاط، أو الخطوط أو القطع أو المنحنيات على مستوى. **المضلع** هو شكل مستوي مغلق يحده عدد محدود من القطع.

يوجد لجميع الأشكال المستوية المحدودة مقياس يسمى المساحة. **المساحة** هي الكمية التي تعبر عن اِتّسَاع شكل ثنائي الأبعاد في مستوى.

المساحة هي النظير ثنائي الأبعاد لطول خط أو منحنى (مفهوم أحادي البعد) أو حجم المجسم (مفهوم ثلاثي الأبعاد).

8- **النقاط المتسامتة** هي النقاط التي تقع على نفس الخط المستقيم أو الشعاع أو القطعة.



الشكل 1-1-3: [تعريف 1-11] لاحظ أنه يمكن الإشارة إلى الزاويتين بـ ∠BAC و ∠CAB ، أو الزاوية عند النقطة A حيث A رأس الزاوية.

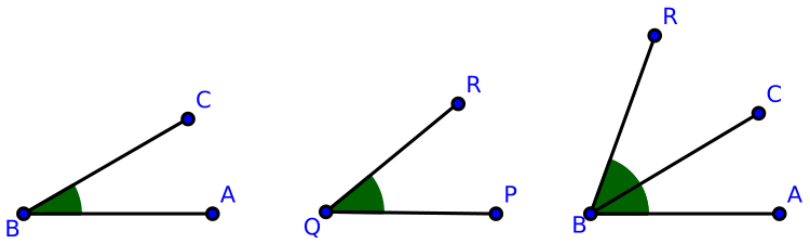
الزاوية

9- **الزاوية المستقيمة** (أو ببساطة الزاوية) هي الزاوية المكونة من خطين مستقيمين أو قطعتين أو شعاعين ممتدين للخارج من نقطة مشتركة، ولكن في اتجاهين مختلفين.

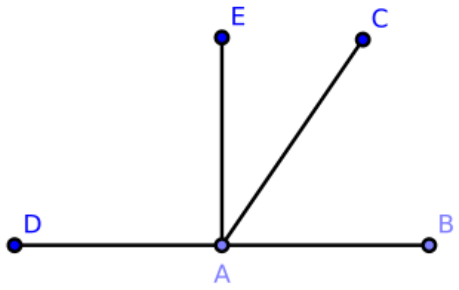
10- **رأس الزاوية** هي نقطة التقاطع بين الخطين أو الشعاعين أو القطعتين المكونين للزاوية.

11- نشير إلى الزاوية بالرمز ∠ وثلاثة أحرف مثل BAC، حيث الحرف الأوسط A يكون عند الرأس. ومن ثم، يمكن الإشارة إلى هذه الزاوية إما بـ∠BAC أو ∠CAB . من حين لآخر، سنشير للزاوية عند A بكتابة "الزاوية عند النقطة A" بدلاً من تسمية الزاوية على النحو الوارد أعلاه.

12- الزاوية المكونة بتركيب زاويتين أو أكثر تسمى بمجموعهم. ولذلك في الشكل 1-1-4، نجد أن $\angle ABR = \angle PQR \oplus \angle ABC$ حيث تُوضع $\overline{QP}$ على القطعة $\overline{BC}$. نكتب $\angle ABR = \angle PQR + \angle ABC$ للتعبير عن هذا المفهوم.



الشكل 1-1-4: [تعريف 1-12]



الشكل 1-1-5: [تعريف 1-13]

13- افترض أن القطعتين $\overline{BA}$ و $\overline{AD}$ مركبتان بحيث $\overline{BA} \oplus \overline{AD} = \overline{BD}$ حيث $\overline{BD}$ قطعة (انظر الشكل 1-1-5). إذا كانت النقطة C التي لا تقع على القطعة $\overline{BD}$ متصلة بالنقطة A، فإن الزاويتين $\angle BAC$ و $\angle CAD$ **مكملتان** لبعضهما البعض. يظل هذا التعريف صحيحًا إذا استبدلت بالقطع خطوط مستقيمة أو أشعة، مع مراعاة ما يلزم من التبديل أو التعديل.

14- عندما تقف قطعة، $\overline{AE}$، على قطعة أخرى، $\overline{BD}$، بشرط أن تكون الزاويتان المتجاورتان على جانبي $\overline{AE}$ متساويتين (أي $\angle EAB = \angle EAD$)، تسمى كل من الزاويتين **بالزاوية القائمة**، وتوصف القطعة التي تقف على الأخرى بأنها عمودية عليها. (انظر الشكل 1-1-5).

نكتب $\overline{AE}$ عمودية على $\overline{DB}$ أو ببساطة $\overline{AE} \perp \overline{DB}$. ويترتب على ذلك أن الزاوية المكملة للزاوية القائمة قائمة أيضًا.

تُعرّف الخطوط العمودية على كائن متعدد الأضلاع بأنها **أعمدة الكائن**.

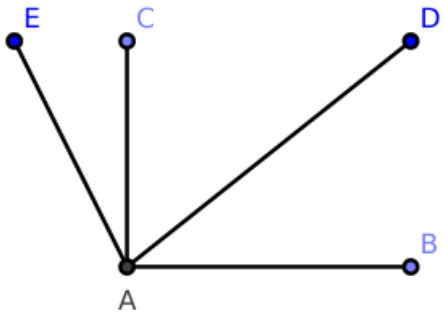
التعريف أعلاه ينطبق على الخطوط المستقيمة والأشعة، مع ما يلزم من التبديل أو التعديل.

عادةً ما يُشار إلى القطعة المستقيمة داخل مثلث والتي تمتد من الرأس إلى الضلع المقابل وتكون عمودية على هذا الضلع **بارتفاع المثلث**، مع أنّه يمكن الإشارة إليها بالمعنى العام باعتبارها **عمود المثلث**.

15- الزاوية الحادة هي زاوية أصغر من الزاوية القائمة. $\angle DAB$ في الشكل 1-1-6 زاوية حادة.

16- الزاوية المنفرجة هي زاوية أكبر من الزاوية القائمة. إن $\angle EAB$ في الشكل 1-1-6 زاوية منفرجة. مكملة الزاوية الحادة هي زاوية منفرجة، والعكس، مكملة الزاوية المنفرجة هي زاوية حادة.

17- إذا كان مجموع زاويتين يساوي زاوية قائمة، فإن كل واحدة منهما تكون **متممة** الأخرى. انظر الشكل 1-1-6.



الشكل 1-1-6: [تعريف 1-17] الزاوية ∠BAC زاوية قائمة. لأن ∠BAC = ∠CAD + ∠DAB، ويترتب على ذلك أن الزاويتين ∠BADو ∠DAC كل منهما متممة للأخرى.

الخطوط المتقاطعة

18- **الخطوط المتقاطعة** هي أي ثلاث خطوط مستقيمة أو أكثر تتقاطع في نفس النقطة. ينطبق هذا التعريف على الأشعة والقطع، مع ما يلزم من التبديل والتعديل.

19- **الرأس** هي النقطة المشتركة التي تمر عبرها الأشعة.

المثلث

20. **المثلث** هو مضلع يتكون من ثلاث قطع متصلة عند نقاط النهاية. تسمى هذه القطع الثلاثة **أضلاع المثلث**. يمكن الإشارة إلى ضلع، على وجه الخصوص، بقاعدة المثلث لأسباب توضيحية، ولكن لا يوجد فرق جوهري بين خصائص القاعدة وخصائص أي من الضلعين الآخرين. يُستثنى من ذلك المثلث المتساوي الساقين حيث يتساوى الضلعان (الساقان) في الطول.

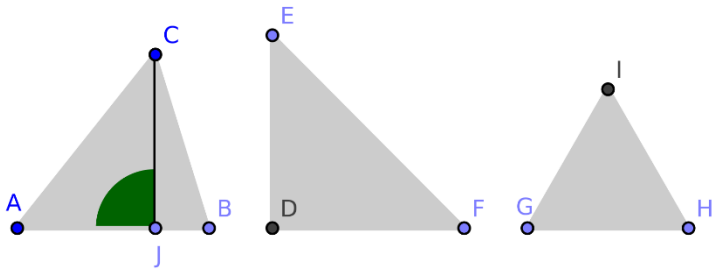
صيغة مساحة المثلث هي

$$A = \frac{1}{2}bh$$

حيث b = طول ضلع، و h = طول القطعة العمودية من هذا الضلع إلى الرأس المقابل.

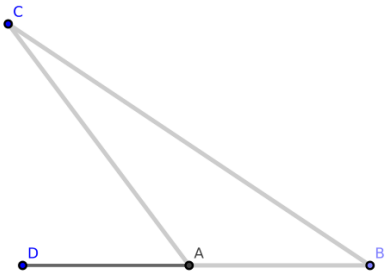
تكون مساحة المثلث صفرًا، فقط، إذا كانت رؤوسه متسامتة.

21- **المثلث المختلف الأضلاع** هو المثلث الذي لا تتساوى أضلاعه الثلاثة في الطول (المثلث الأيسر في الشكل 1-1-7). **المثلث المتساوي الساقين** هو المثلث ذو الضلعين المتساويين (المثلث الأوسط في الشكل 1-1-7). **المثلث متساوي الأضلاع** هو مثلث جميع أضلاعه متساوية (المثلث الأيمن في الشكل 1-1-7). **المثلث متساوي الزوايا** هو مثلث جميع زواياه متساوية.



الشكل 1-1-7: [تعريف 1-21] الأنواع الثلاثة للمثلثات: مختلف الأضلاع، متساوي الساقين، متساوي الأضلاع.

22- **المثلث القائم** هو مثلث تكون إحدى زواياه قائمة، مثل المثلث الأوسط في الشكل 1-1-7. **وتر المثلث** هو الضلع المقابل للزاوية القائمة. (في المثلث الأوسط في الشكل 1-1-7، ∠EDF قائمة، لذا فإن $\overline{EF}$ هي وتر المثلث.)



الشكل 1-1-8: [تعريف 1-23]

23- **المثلث المنفرج** هو مثلث إحدى زواياه منفرجة (مثل ∠CAB في ▲CAB، الشكل 1-1-8).

24- **المثلث الحاد** هو مثلث كل زاوية من زواياه حادة، مثل المثلثين الأيسر والأيمن في الشكل 1-1-7.

25- **الزاوية الخارجية** لمثلث هي الناتجة من مد ضلع المثلث. في الشكل 1-1-8، يحتوي ▲CAB على $\overline{BA}$ الممتد $(\overline{BD})$ التي تصنع الزاوية الخارجية ∠DAC.

كل مثلث له ست زوايا خارجية. أيضًا، كل زاوية خارجية مكملة للزاوية الداخلية المجاورة. في الشكل 1-1-8، الزاوية الخارجية ∠DAC تُكمل الزاوية الداخلية المجاورة ∠CAB.

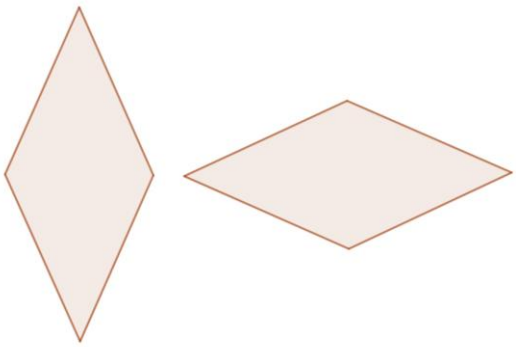
المضلع

26- المضلع هو شكل مستقيم محدود بثلاث قطع مستقيمة أو أكثر (انظر التعريف 7). على سبيل المثال، الدائرة شكل مستوي، ولكنها ليست مضلعًا، لكن المثلثات في الشكل 1-1-8 أشكال مستوية ومضلعات.

27- يقال إن **المضلع محدب** إذا لم تكن له زاوية داخلية أكبر من $180°$.

28- **رباعي الأضلاع** هو المضلع المكون من أربعة أضلاع.

29- **شبيه المعين Lozenge** هو متوازي أضلاع متساوي الأضلاع وكل زاوية من زواياه الحادة تساوي 45 درجة. في بعض الأحيان، يُسقط شرط الـ 45 درجة، والمطلوب فقط أن يوجد فيه زاويتان متقابلتان حادتان والاثنتان الأخريان منفرجتان. يستخدم مصطلح **معين Rhombus** بشكل شائع لوصف متوازيات الأضلاع المتساوية الأضلاع. انظر الشكل 1-1-9.



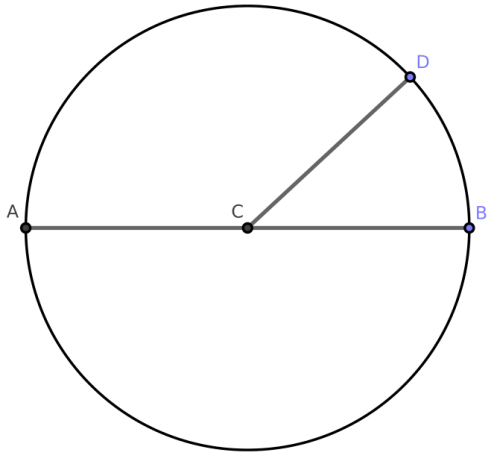
الشكل 1-1-9: [تعريف 1-29] معينان.

30. **المربع** هو المعين الذي له زاوية قائمة.

31- يسمى المضلع الذي له خمسة أضلاع خماسي الاضلاع. والذي له ستة أضلاع، سداسي الأضلاع، إلخ.

الدائرة

32- **الدائرة** شكل مستوي يُنشأ عن طريق توصيل جميع النقاط متساوية البعد عن نقطة مركزية. النقطة المركزية هي **مركز الدائرة**، والنقاط المتصلة **محيط الدائرة**.



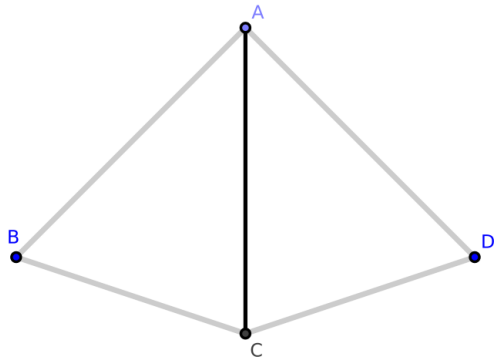
الشكل 1-1-10: [تعريف 1-32] ●C مركزها C ونصف قطرها $\overline{CD}$. لاحظ أن $CA = CB = CD$. لاحظ أيضًا أن $\overline{AB}$ هو قطر الدائرة.

33- نصف قطر الدائرة هو أي قطعة مبنية من مركزها إلى محيطها، مثل $\overline{CA}$ أو $\overline{CB}$ أو $\overline{CD}$ في الشكل 1-1-10. لاحظ أن $CA = CB = CD$ (أي أن جميع أنصاف الأقطار، لنفس الدائرة، متساوية).

34- **قطر الدائرة** هو القطعة المنشأة مرورًا بالمركز ونهايتيها على المحيط، مثل $\overline{AB}$ في الشكل 1-1-10.

غير ذلك

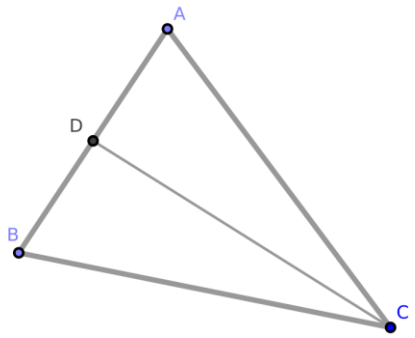
35- **محور تماثل** هو أي قطعة أو خط أو شعاع يقسم الشكل الهندسي المنتظم أو المتماثل إلى نصفين متساويين (مثل $\overline{AC}$ في المضلع ABCD، الشكل 1-1-11).



الشكل 1-1-11: [تعريف 1-35]

تعريف بديل: إذا نُصف شكل بواسطة قطعة (أو خط أو شعاع) بشرط أن لكل نقطة على جانب من القطعة (أو الخط أو الشعاع) توجد نقطة تناظرها على الجانب الآخر من القطعة (أو الخط أو الشعاع) وبعدي النقطتين عن القطعة (أو الخط أو الشعاع) متساويين، فإن القطعة (أو الخط أو الشعاع) هي **محور التماثل** الشكل.

36- **متوسط المثلث** هو أي قطعة منشأة من أي زاوية لمثلث إلى نقطة منتصف الضلع المقابل. كل مثلث له ثلاث متوسطات متقاطعة. **مركز كتلة المثلث** هي نقطة تقاطع المتوسطات الثلاثة.



الشكل 1-1-12: [تعريف 1-36] $\overline{CD}$ متوسط ABC▲. يحتوي المثلث على متوسطين آخرين غير ظاهرين في الصورة، وتقاطعهما مركز كتلة ABC▲.

37- **المحل الهندسي** locus هو مجموعة من النقاط التي يفي موقعها أو يتحدد بشرط أو أكثر. على سبيل المثال، الدائرة هي المحل الهندسي لنقطة بعدها عن المركز يساوي نصف قطر الدائرة.

38- **المركز المحيطي** لمثلث هو النقطة التي تتقاطع فيها المنصفات العمودية الثلاثة للمثلث.

39- **المركز الداخلي** لمثلث هو نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية الثلاث للمثلث.

سيكون هناك مزيد من التعريفات في [1-5] والفصول اللاحقة.

40- **التراكب** هو وضع كائن هندسي على آخر، مثل خط على خط، أو مثلث على مثلث، أو دائرة على دائرة، وما إلى ذلك. التراكب المستخدم في الهندسة عقلي فقط. أي أننا نتصور أن أحد الأشياء يُوضع على الآخر. وبعد ذلك، إذا تمكنا من إثبات أن الكائنات تتطابق، فإننا نستنتج من الموضوعة الحالية أنهم متساوون من جميع النواحي. يتضمن التراكب المبدأ الذي يستخدمه إقليدس بشكل متكرر دون ذكره صراحة، الذي نصه: "يمكن نقل أي شكل من موضع إلى آخر دون تغيير الحجم أو الهيئة."

2-1 المسلمات

نفترض ما يلي:

1- يمكن إنشاء خط مستقيم أو شعاع أو قطعة من أي نقطة إلى أي نقطة أخرى. يمكن تقسيم الخطوط والأشعة والقطع بواسطة نقاط إلى قطع جزئية محدودة الطول.

2- يمكن أن تُمد أي قطعة، إلى أي قطعة أطول أو شعاع أو خط مستقيم.

3- يمكن إنشاء دائرة من أي نقطة وبأي طول محدود من المركز.

3-1 موضوعات

1-3-1 الموضوعات الجبرية

لنفترض أن a، b، c، إلخ، أعداد حقيقية. تتطلب هذه الموضوعات أربع عمليات: الجمع، والطرح والضرب والقسمة.

الجمع (غالبًا ما يُشار إليها برمز الجمع "+") هو إحدى العمليات الحسابية الأساسية الأربع، العمليات الأخرى هي الطرح والضرب والقسمة. إن جمع عددين ممثلين لكميتين يعطينا المجموع أو الكمية الإجمالية للكميتين مجتمعتين. على سبيل المثال، إذا راديان $\angle A = \frac{3}{4}\pi$ و $\angle B = \frac{1}{4}\pi$، إذًا

$$\angle A + \angle B = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)\pi = \frac{4}{4}\pi = \pi \text{ راديان}$$

جمع الكميات يُعرَّف عندما يكون للكميات المجموعة نفس الوحدات. على سبيل المثال، القطعة التي يبلغ طولها 3 وحدات ثم تُمد بمقدار 7 وحدات إضافية، يصبح طولها الإجمالي 10 وحدات؛ أو 3 + 7 = 10 حيث يمثل كل عدد عددَ الوحدات. ومع ذلك، إذا أضيفت قطعة بطول 3 وحدات إلى راديان $\angle A = \frac{3}{4}\pi$ ، فإن المجموع غير مُعرّف.

الطرح هو عملية إزالة كميات من كميات. يُشار إليه بعلامة الطرح (−). على سبيل المثال، إذا كان راديان $\angle A = \frac{3}{4}\pi$ و $\angle B = \frac{1}{4}\pi$ ، إذًا

$$\angle A - \angle B = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)\pi = \frac{2}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$$

الطرح حالة خاصة من الجمع حيث

$$a + (-b) = a - b = c$$

الضرب (غالبًا ما يُشار إليه بالرمز "×" أو بنقطة "·" أو بعدم وجود رمز): عند التفكير في الضرب كجمع متكرر، فإن الضرب يعادل إضافة عدد من نسخ حد (المضروب) يساوي الحد الآخر (المضروب فيه). عادةً ما يكتب المضروب فيه أولاً والمضروب ثانيًا، هذا قد يختلف، وأحيانًا لا يكون التمييز، بينهما، ذا معنى. مثال على ذلك،

$$a \times b = a + a + \ldots + a$$

حيث حاصل الضرب $a \times b$ يساوي a مضافًا إلى نفسه b مرات.

الضرب هو حالة خاصة من الجمع. يمكن حساب مساحة بعض الكائنات الهندسية المستوية (مثلثات، مستطيلات، متوازي الأضلاع، إلخ) عن طريق ضرب طولين (القاعدة والارتفاع، طولا ضلعين متجاورين، إلخ). يمكن أيضًا حساب حجم بعض الكائنات الهندسية المجسمة (كرات، مكعبات، إلخ) عن طريق ضرب ثلاثة أطوال.

القسمة: في الحساب في المرحلة الابتدائية، القسمة (يشار إليها بالرمز ÷ أو / أو $\frac{a}{b}$ حيث $b \neq 0$). على وجه التحديد، إذا كانت b في c تساوي a، مكتوبًا:

$$a = b \times c$$

حيث b ليست صفرًا، إذا حاصل قسمة a على b يساوي c، ويكتب هكذا:

$$a \div b = c \qquad \frac{a}{b} = c \quad a/b = c$$

القسمة هي حالة خاصة من الضرب حيث

$$a.\frac{1}{b} = a \div b = \frac{a}{b}$$

أيضا، b يقسم a إذا كان $a = t \cdot b$ ، حيث t عدد صحيح؛ أو، $\frac{a}{b} = \frac{tb}{b} = t$ حيث t عدد صحيح. لاحظ أنه إذا b قسمت a، فإن،

1- b قاسم a

2- a مضاعف b

3- a قابلة للقسمة على b

نستخدم ما يلي كموضوعات جبرية:

1- خاصية الجمع: إذا كانت $a = b$ و $c = d$ ، فإن $a + c = b + d$.

2- خاصية الطرح: إذا كانت $a = b$ و $c = d$، إذًا $a - c = b - d$.

3- خاصية الضرب: إذا كانت $a = b$، إذًا $ca = cb$.

4- خاصية القسمة: إذا $a = b$ و $c \neq 0$ ، إذًا $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.

5- خاصية الاستبدال (التعويض): إذا كانت $a = b$ ، فيمكن التعويض بأي من a أو b عن الآخر في أي معادلة أو متباينة.

6- خاصية الانعكاس: $a = a$.

7- خاصية التماثل: إذا $a = b$ ، $b = a$.

8- خصائص القَلْب للمتباينات:

(أ) إذا $a \leq b$، فإن $b \geq a$.

(ب) إذا $a \geq b$، فإن $b \leq a$.

9- خصائص التعدي للمتباينات:

(أ) إذا $a \geq b$ و $b \geq c$ فإن $a \geq c$.

(ب) إذا $a \leq b$ و $b \leq c$ فإن $a \leq c$.

(ج) إذا $a \geq b$ و $b > c$ فإن $a > c$.

(د) إذا $a = b$ و $b > c$ فإن $a > c$.

10- خصائص التباين في الجمع والطرح:

(أ) إذا $a \leq b$، فإن $a + c \leq b + c$ و $a - c \leq b - c$.
(ب)إذا $a \geq b$ ، فإن $a + c \geq b + c$ و $a - c \geq b - c$.

11- خصائص المتباينات في الضرب والقسمة:

(أ) إذا $a \geq b$ و $c > 0$ فإن $ac \geq bc$ و $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$.
(ب) إذا $a \leq b$ و $c > 0$ فإن $ac \leq bc$ و $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$.
(ت) إذا $a \geq b$ و $c < 0$ فإن $ac \leq bc$ و $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$.
(ث) إذا $a \leq b$ و $c < 0$ فإن $ac \geq bc$ و $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$.

12- خاصية المعكوس الجمعي للمتباينات:

(أ) إذا $a \leq b$ فإن $-a \geq -b$.
(ب)إذا $a \geq b$ فإن $-a \leq -b$.

13- خاصية المعكوس الضربي للمتباينات (حيث يكون a و b موجبين أو سالبين فقط):

(أ) إذا $a \leq b$ فإن $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.
(ب)إذا $a \geq b$ فإن $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

14- خاصية المعكوس الضربي للمتباينات: حيث a موجب و b سالب.

(أ) إذا $a > b$ فإن $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

2-3-1 مَوْضوعاتُ التطابق

في الهندسة، يتطابق شكلان أو كائنان إذا كان لهما نفس الشكل والحجم، أو إذا كان لأحدهما له نفس الشكل والحجم كالصورة المعكوسة للآخر. رمزيًا، يكون كائنين متطابقين إذا وفقط إذا كان يمكن تحويل أحدهما إلى الآخر باستخدام الانتقال أو التدوير أو الانعكاس فقط. هذا يعني أنه يمكن إعادة وضع أي كائن وعكسه (دون تغيير حجمه) لينطبق بدقة على الكائن

الآخر. لذلك فإن شكلين مستويين مختلفين على قطعة من الورق متطابقان إذا تمكنا من قصهما ثم مطابقتهما تمامًا. يُسمح بقلب الورق.

بعض الأمثلة:

- القطعتان المستقيمتان متطابقتان إذا كان لهما نفس الطول.
- الزاويتان متطابقتان إذا كان لهما نفس القياس.
- الدائرتان متطابقتان إذا كان لهما نفس القطر أو نصف القطر.

إذا كانت a و b متطابقتين، فيمكننا كتابة $a \cong b$. ثلاث خصائص للتطابق مع أمثلة:

1- الخاصية الانعكاسية: $\overline{DE} \cong \overline{DE}$ و$\angle ABC \cong \angle ABC$.

2- خاصية التماثل: إذا $\overline{DE} \cong \overline{FG}$ ، فإن $\overline{FG} \cong \overline{DE}$. وأيضًا، إذا $\angle ABC \cong \angle DEG$ فإن $\angle DEG \cong \angle ABC$.

3- خاصية التعدي: إذا $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{EF}$. أيضًا، إذا $\angle ABC \cong \angle DEF$ و $\angle DEF \cong \angle GHI$ ، فإن $\angle ABC \cong \angle GHI$.

تمنحنا المسلمات الجبرية ومسلمات التطابق خاصية التوزيع:

$$a(b + c) = ab + ac$$

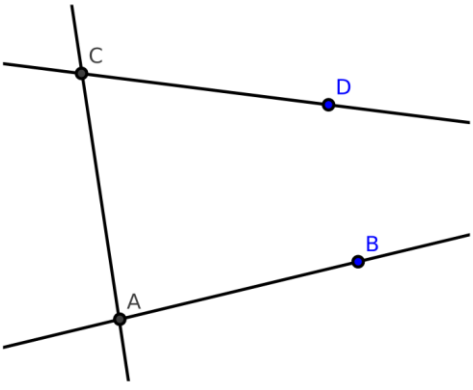
3-3-1 الموضوعات الهندسية

1- الكائنات المتطابقة متساوية في القياس.

2- لا يمكن لخطين مستقيمين في مستوى إحاطة مساحة محدودة.

3- جميع الزوايا القائمة متساوية.

4- إذا تقاطع خطان ($\overleftrightarrow{AB}$،$\overleftrightarrow{CD}$) مع خط ثالث ($\overleftrightarrow{AC}$) بحيث مجموع الزاويتين الداخليتين ($\angle BAC + \angle ACD$) على نفس الجانب من الخط أقل من مجموع زاويتين قائمتين، فسيلتقي الخطان على بعد محدود، على هذا الجانب. انظر الشكل 1-3-1.



الشكل 1-3-1: يجب أن يتقاطع $\overleftrightarrow{AB}$ مع $\overleftrightarrow{CD}$ على بعد محدود.

ما سبق ينطبق على الأشعة والقطع، مع ما يلزم من التبديل والتعديل.

يمكن استبدال **موضوعة بلاي** فير بالموضوعة أعلاه، والتي تنص على ما يلي: "في أي مستوى، يمكن رسم خط على الأكثر موازيًا لخط أخر عبر نقطة ليست على هذا الخط." سميت هذه الموضوعة على اسم عالم الرياضيات الإسكتلندي جون بلاي فير. إن شرطه "على الأكثر" هو المهم؛ لأنه يمكن إثبات بواسطة قضايا إقليدس أن هناك خطًا موازيًا على الأقل. غالبًا فريد ". ما تُكتب هذه الموضوعة بعبارة "هناك خط

"في أي مستوى، يمكن رسم خط فريد موازيًا لخط أخر عبر نقطة ليست على هذا الخط."

تشمل الموضوعات المكافئة للموضوعة 4 ما يلي:

- مجموع زوايا أي مثلث 180 درجة (مسلمة المثلثات).
- يمكن إحاطة أي مثلث.
- يوجد شكل رباعي جميع زواياه قائمة (أي مستطيل).
- يوجد زوج من الخطوط المستقيمة على بعد ثابت عن بعضهما البعض.
- الخطان الموازيان لنفس الخط متوازيان.
- لا يوجد حد أقصى لمساحة المثلث. (موضوعة واليس)

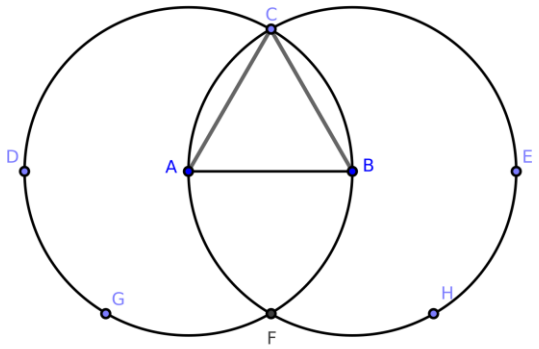
4-1 الكتاب الأول، القضايا 1-26

قضية 1-1 إنشاء مثلث متساوي الأضلاع.

على أي قطعة مستقيمة، من الممكن إنشاء مثلث متساوي الأضلاع.

لنفترض أن لدينا $\overline{AB}$؛ ندعي أنه يمكن إنشاء مثلث متساوي الأضلاع على $\overline{AB}$.

الإثبات: أنشئ الدائرة A●، التي مركزها A ونصف قطرها $\overline{AB}$ [مسلمة 3 من الجزء 1-2]. أنشئ الدائرة B●، التي مركزها B ونصف قطرها $\overline{AB}$، التي تتقاطع مع A● عند النقطة C. أنشئ القطعتين $\overline{CA}$، $\overline{CB}$ [مسلمة 1 من الجزء 1-2]. ندعي أن ABC ▲ متساوي الأضلاع.



الشكل 1-4-1: [1-1]

لأن A مركز الدائرة A● ، $AC = AB$ [**تعريف** 1-33] (كل منهما نصف قطر). لأن B مركز الدائرة B●، $AB = BC$ (كل منهما نصف قطر). حسب [الموضوعة 9 الجزء 1-3-1]، $AC = AB = BC$.

لأن هذه القطع هي أضلاع ABC ▲، فإن ABC ▲ متساوي الأضلاع [تعريف 1-21]. لأن ABC ▲ مبني على القطعة $\overline{AB}$ ، فقد أثبتنا ادعاءنا.

ملاحظة: [1-1] - [3-1] توطئتان لـ[4-1].

ملاحظة: قد تبدو هذه القضية غريبة بالنسبة للقراء المطلعين على البراهين الرياضية الحديثة. تُظهر الإثباتات من القرن الحادي والعشرين عادةً أن بعض الكائنات الرياضية غير الملموسة إما موجودة أو غير موجودة، بينما [1-1] تصف طريقة إنشاء كائن، ثم تثبت أن هذا الكائن هو ما كنا ننوي بنائه.

في عصر إقليدس، كانت الرياضيات مشابهة للهندسة والإنشاء. إذا تمكنت من إثبات وجود شيء ما، ولكنك لم تستخدم هذه المعرفة للمساعدة في إنشاء شيء ملموس، فأنت على الطريق الصحيح لتصبح مُعدم (فقير) بدوام كامل.

يجب على الطلاب المعاصرين رسم أو إنشاء أي كائنات موصوفة في هذه القضايا.

أسئلة الامتحان.

1- ماذا نفترض في هذا القضية؟

2- ما ادعاؤنا؟

3- ما هي القطعة المستقيمة المحدودة؟

4- ما هو عكس المحدود؟

5- ما المسلمات التي استشهد بها وأين استشهد بها؟

6- ما الموضوعات التي استُشهد بها وأين استُشهد بها؟

7- ما فائدة تعريف الدائرة؟ ما هي الدائرة؟

8- ما هو المثلث متساوي الأضلاع؟

تمارين

يجب محاولة حل التمارين رقم 2# - 5# بعد أن يكمل الطالب الفصل الأول.

1- إذا أنشئت القطعتين $\overline{AF}$ و $\overline{BF}$، فأثبت أن الشكل ACBF▰ معين. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- إذا أنشئت $\overline{CF}$ ومدت $\overline{AB}$ إلى محيط الدوائر (عند النقطتين D وE)، اثبت أن المثلثين CDF ▲ و CEF ▲ متساويا الأضلاع. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

3- إذا مدت $\overline{CA}$ و $\overline{CB}$ لتتقاطعا مع المحيطين عند النقطتين G وH، فأثبت أن النقاط G وF وH متسامتة وأن GCH ▲ متساوي الأضلاع.

4- أنشئ $\overline{CF}$ واثبت أن $CF^2 = 3.AB^2$.

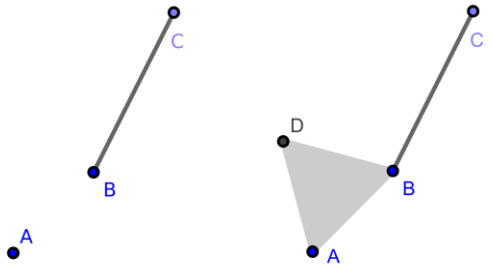
القضية 1-2 إنشاء قطعة مستقيمة مساوية لقطعة مستقيمة أخرى من نقطة معينة.

بأي قطعة ونقطة، من الممكن إنشاء قطعة أخرى بحيث:

(1) تكون النقطة إحدى نهايتي القطعة الجديدة.

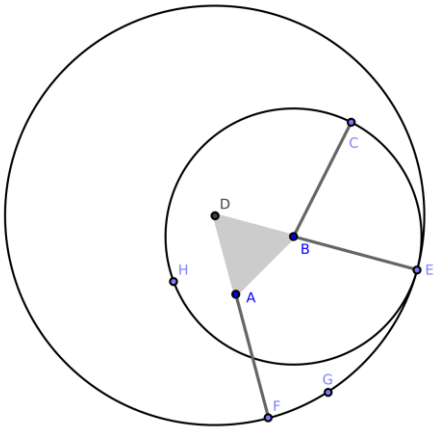
(2) يكون طولها مساوي لطول القطعة.

الإثبات لنفترض أن A نقطة اعتباطية على المستوى، و$\overline{BC}$ أي قطعة. ادعاؤنا مذكور أعلاه.



الشكل 1-4-2: [1-2] في بداية الإثبات (على اليسار)، الإنشاء الجزئي (على اليمين)

أنشئ $\overline{AB}$ ، وعلى $\overline{AB}$ أنشئ ABD ▲ المتساوي الأضلاع [1-1]. أنشئ الدائرة B●، التي مركزها B ونصف قطرها $\overline{BC}$. مد $\overline{DB}$ لتتقاطع مع الدائرة B● عند E [مسلمة 2 الجزء 1-2]. أنشئ الدائرة D●، التي مركزها D ونصف قطرها $\overline{DE}$. مد $\overline{DA}$ لمقابلة B● عند F.



الشكل 1-4-3: [1-2] الإنشاء الكامل

الإثبات: من الواضح أن A نهاية من نهايتي $\overline{AF}$ (ادعاء 1). إذا تمكنا من إظهار أن $BC = AF$، فسنكون قد أثبتنا ادعاءنا. لأن $\overline{DE}$ و $\overline{DF}$ نصفا قطر D●، $DE = DF$ [تعريف 1-32]. لأن DAB ▲ متساوي الأضلاع، $DB = DA$ [تعريف 1-21] حسب [الموضوعة 2 من الجزء 1-3-1]، نجد أن

$$DF - DA = DE - DB$$

لكن $DF - DA = AF$ و$DE - DB = BE$ حسب [الموضوعة 5 من الجزء 1-3-1]، نجد أن $AF = BE$.

لأن $\overline{BC}$ و $\overline{BE}$ نصفا قطر في B●، $BE = BC$. حسب [الموضوعة 9 من الجزء 1-3-1] (المساويان لنفس الشيء متساويان)، $AF = BC$ (ادعاء 2)، وهذا يكمل الإثبات.

تمارين

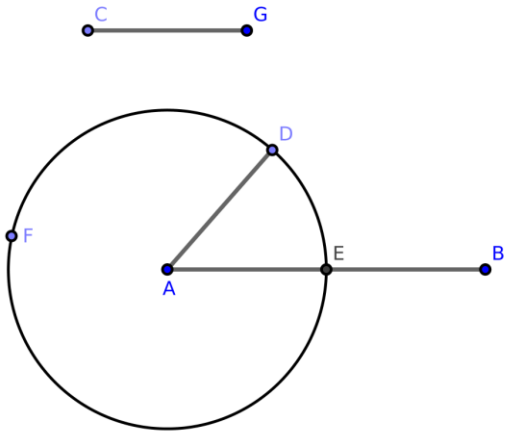
1- اثبت [1-2] عندما تكون A نقطة على $\overline{BC}$. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

القضية 1-3. تقسيم قطعة مستقيمة.

لأي قطعتين، غير متساويتين، من الممكن تقسيم القطعة الكبرى إلى قطعتين جزئيتين تكون إحداهما مساوية في الطول للقطعة الصغرى.

الإثبات أَنْشِئْ القطعتين $\overline{AB}$ و $\overline{CG}$ بشرط أن $CG < AB$. ندعي أنه يمكن تقسيم $\overline{AB}$ إلى القطعتين $\overline{AE}$ و $\overline{EB}$، بحيث إن $AE = CG$.

من A، أنشئ $\overline{AD}$ بشرط أن $AD = CG$ [مسلمة 1-3]. أنشئ ●A التي مركزها A ونصف قطرها AD [1-2] التي تتقاطع مع $\overline{AB}$ عند E.



الشكل 1-4-4: [1-3]

لأن A مركز ●A ، $AE = AD$ [تعريف 1-32]. لأن $AD = CG$ (حسب الإنشاء). حسب [الموضوعة 9 من الجزء 1-3-1]، $CG = AE$، وهذا يثبت ادعاءنا.

اللازمة. 1-3-1 لأي قطعة وشعاع، من الممكن قطع قطعة من الشعاع مساوية في الطول للقطعة.

أسئلة الامتحان.

1- ما القضية السابقة التي وظفت في هذا حل؟

2- ما الموضوعة المستخدمة في التوضيح؟

3- وضح كيفية مد القطعة الأقصر من أي قطعتين حتى يتساوى طول القطعة الممتدة مع طول القطعة الأطول.

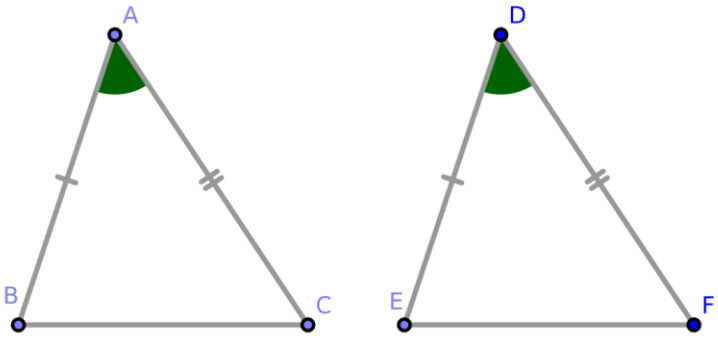
تمارين

1- اثبت [اللازمة 1-3-1].

قضية 1-4. مبرهنة "ضلع-زاوية-ضلع" لتطابق المثلثات.

إذا ساوى ضلعان في مثلث ضلعين في آخر، على الترتيب، وكانت الزاوية المحصورة بين الضلعين في الأول تساوى الزاوية المناظرة في الثاني، فإن المثلثين متطابقان.

الإثبات إذا كان $DE = AB$ و $DF = AC$ و $\angle EDF = \angle BAC$ في ▲ ABC و ▲ DEG، إذا
▲ DEF ≅ ▲ ABC .



الشكل 1-4-5: [1-4]

تذكر أن التراكب يسمح لنا بتحريك كائن فوق آخر دون تشويه شكله أو قياسه. إذا وضع ▲ ABC على ▲ DEF بشرط أن توضع النقطة A على النقطة D و $\overline{AB}$ على $\overline{DE}$ ، فإن النقطة B تتطابق مع النقطة E لأن $AB = DE$.

لأن $\overline{AB}$ يتطابق مع $\overline{DE}$، فإن $\overline{AC}$ يتطابق أيضًا مع $\overline{DF}$ ؛ لأن $\angle BAC = \angle EDF$. لأن $AC = DF$ ، فإن C تتطابق مع F.

لأن B تتطابق مع E، فإن القاعدة $\overline{BC}$ لـ ▲ ABC تتطابق مع $\overline{EF}$ القاعدة لـ ▲ DEF، ويترتب على ذلك أن $BC = EF$.

ومن ثم فإن جميع أضلاع وزوايا أحد المثلثين متساوية مع الأضلاع والزوايا المناظرة في المثلث الآخر. نستنتج أن
▲ ABC ≅ ▲ DEF

ملاحظة تحتوي أصول إقليدس على ثلاث قضايا حول تطابق المثلثات: [1-4] ضلع- زاوية – ضلع [1-8]، ضلع- ضلع- ضلع، و [1-26] زاوية - زاوية -ضلع وزاوية-ضلع- زاوية.

أسئلة الامتحان.

1- ما المقصود بالتراكب؟

2- كم عدد الأجزاء التي تشكل مثلثًا؟ (الإجابة 6، ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا.)

3- إذا طُلب أن نثبت أن مثلثين متطابقان، فكم عدد الأجزاء من أحدهما يجب أن يكون متساويًا مع الأجزاء المناظرة من الآخر؟ (الإجابة. بشكل عام، أي ثلاثة ما عدا الزوايا الثلاث. سنثبت هذا في [1-8] و [1-26]، وكلاهما يستخدم [1-4].)

تمارين

1- اثبت أن الخط الذي ينصف الزاوية الرأسية في مثلث متساوي الساقين ينصف القاعدة، أيضًا، عموديًا. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- إذا تساوى ضلعان متجاوران في شكل رباعي ونَصّف القطر الزاوية بينهما، فأثبت أن الضلعين المتبقيين متساويان في الطول، أيضًا. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

3- إذا نَصفت قطعتان كل منهما الأخرى عموديًا، فاثبت أن أي نقطة على أي من القطعتين يكون بعداها عن نهايتي الأخرى متساويين. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

4- إذا أنشئت مثلثات متساوية الأضلاع على أضلاع أي مثلث، فاثبت أن المسافات بين رؤوس المثلث الأصلي والرؤوس المقابلة في المثلثات متساوية الأضلاع متساوية. (يمكن إثبات ذلك بعد دراسة [1-32].)

القضية 1-5 المثلثات متساوية الساقين I.

لأي مثلث متساوي الساقين:

(1) إذا مدت أضلاع المثلث، بخلاف القاعدة، فإن الزاويتين الموجودتين أسفل القاعدة متساويتان في القياس.

(2) الزاويتان على القاعدة متساويتين في القياس.

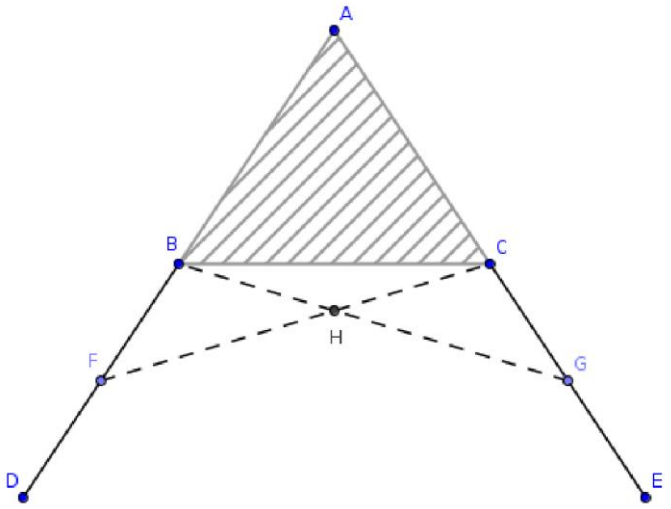
الإثبات أنشئ ABC ▲ بشرط أن AB = AC واعتبر الضلع $\overline{BC}$ قاعدة المثلث. أنشئ $\overline{AB}$ عن طريق مد $\overline{AB}$ وأنشئ $\overline{AE}$ عن طريق مد $\overline{AC}$ بحيث يصبح CE ≥ BD . ندعي:

1. ∠DBC = ∠ECB
2. ∠ABC = ∠ACB

سنثبت كل ادعاء على حدى.

الادعاء 1: ∠DBC = ∠ECB

لنفترض أن F نقطة على $\overline{BD}$ بخلاف B أو D. على $\overline{CE}$ ، اختر النقطة G بشرط أن CG = BF [3-1]. (لأن CE ≥ BD، هذه النقطة ليست نهاية للقطعة). أنشئ $\overline{BG}$ و $\overline{CF}$ [تطبيقان على مسلمة 1 من الجزء 1-2].



الشكل 1-4-6: [1-5]

لأن AG = AF (حسب الإنشاء) و AB = AC، حسب الفرضية، نستنتج من ذلك أن الضلعين AF وAC في ▲FAC متساويان في الطول، على التوالي، مع الضلعين AG و AB في ▲GAB. أيضًا، الزاوية ∠BAC هي الزاوية المحصورة بين كل من زوجي الأضلاع في كل مثلث. حسب [1-4]، ▲GAB ≅ ▲FAC؛ وهذا يقتضي أن ∠AGB = ∠AFC و BG = CF .

فيما يخص ▲FBC و▲GCB : بما أن $CG = BF$ و $BG = CF$ و $\angle AGB = \angle AFC$، حسب [4-1] ▲GCB ≅▲ FBC . وهذا يقتضي أن $\angle GCB = \angle FBC$، وهما الزاويتان أسفل قاعدة ▲ABC؛ أو،

$$\angle DBC = \angle FBC = \angle GCB = \angle ECB$$

هذا يثبت الادعاء 1.

الادعاء 2: $\angle ACB = \angle ABC$

بما أن ▲GCB ≅ ▲FBC، إذًا $\angle GBC = \angle FCB$. حسب الإثبات السابق، $\angle GBA = \angle FCA$

لاحظ أن:

$$\angle FCA = \angle GBA$$

$$\angle FCB + \angle ACB = \angle GBC + \angle ABC$$

$$\angle FCB + \angle ACB = \angle FCB + \angle ABC$$

$$\angle ACB = \angle ABC$$

هذا يثبت الادعاء 2 ويكمل الإثبات.

ملاحظة ترجع الصعوبة، التي قد يواجهها بعض المبتدئين في هذا القضية، إلى حقيقة أن ▲ACF و ▲ABG متداخلان. يجب على المعلم أو الشارح رسم هذه المثلثات بشكل منفصل والإشارة إلى الأجزاء المتناظرة: $AG = AF$، $AB = AC$، و $\angle GAB = \angle FAC$.حسب [4-1]، يتبع ذلك أن $\angle ABG = \angle ACF$ و $\angle AGB = \angle AFC$.

اللازمة 1-5-1 يكون المثلث متساوي الأضلاع فقط إذا كان متساوي الزوايا.

تمارين

1- اثبت أن الزاويتين الموجودتين على القاعدة متساويتان دون مد الضلعين.

2- اثبت أن $\overleftrightarrow{AH}$ محور التماثل لـ ▲ABC. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

3- اثبت أن كل قطر للمعين هو محور تناظر للمعين.

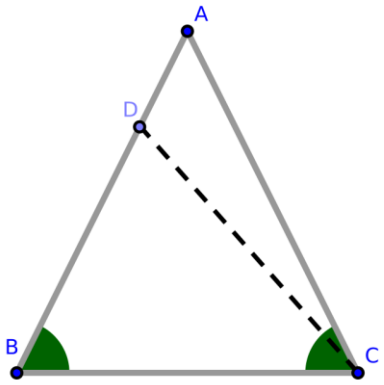
4- حدد نقطة المنتصف لكل ضلع في أي مثلث متساوي الأضلاع؛ اثبت أن القطع التي تصل بينهم تشكل مثلث آخر متساوي الأضلاع. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

5- اثبت [اللازمة. 1-5-1].

القضية 1-6: المثلثات متساوية الساقين II.

إذا تساوت زاويتان في مثلث، فإن الضلعين المقابلين للزاويتين المتساويتين متساويان في الطول (أي إن المثلث متساوي الساقين).

الإثبات أنشئ ABC ▲ بشرط أن ∠ACB = ∠ABC. من أجل إثبات ادعاءنا أن AB = AC، سنستخدم البرهان بالتناقض.



الشكل 1-4-7: [1-6]

بدون فقدان للعمومية، افترض أن AC > AB. على $\overline{AB}$ ، أنشئ نقطة D بشرط أن BD = CA [3-1]، وأنشئ $\overline{CD}$. لاحظ أن 0 < ACD ▲ (أي مساحة ACD ▲ أكبر من 0)؛ وإلا لن يكون ACD ▲ موجودًا.

فيما يخص DBC ▲ و ACB ▲: بما أن AC = DB و ∠DBC = ∠ACB ، وكل مثلث يحتوي على $\overline{BC}$، حسب [4-1] ACB ▲ ≅ DBC ▲. يترتب على ذلك أن DBC ▲ = ACB ▲.

لكن DBC ▲ ⊕ ACD ▲ = ACB ▲، وبالتالي فإن 0 = ACD ▲ (أي أن مساحة ACD ▲ تساوي 0). ولكن أعلاه أظهرنا أن 0 < ACD ▲. إذًا 0 = ACD ▲ و 0 < ACD ▲، هذا تناقض.

على وجه التحديد، افترضنا أن AC > AB وحصلنا على تناقض. إذا افترضنا بدلاً من ذلك أن AB > AC، فسنحصل على نفس التناقض (هذا ما نعنيه بعبارة "بدون فقدان العمومية"؛ هناك طريقتان لبدء الإثبات، وفي كلا الحالتين نحصل على نفس النتيجة). لأن كل من الفرضين AC > AB و AB > AC ينتج عنه تناقض، يجب أن يكون AB = AC، هذا يثبت ادعاءنا.

اللازمة 1-6-1. تشير [1-5] و [1-6]، معًا، إلى أن المثلث يكون متساوي الساقين إذا وفقط إذا كانت الزاويتان الموجودتان عند قاعدته متساويتان.

أسئلة الامتحان.

1- ما الفرضية في هذه القضية؟

2- ما القضية التي تكون هذه القضية مقلوبها؟

3- ما عكس inverse هذه القضية؟

4- ما عكس [1-5]؟

5- ما المقصود بالإثبات بالتناقض؟

6- كيف يثبت إقليدس- عمومًا- القضايا المقلوبة؟

7- ما الافتراض الخاطئ الذي بواسطته أثبتت القضية؟

8- إلى ماذا يؤدي هذا الافتراض الخاطئ؟

تمارين

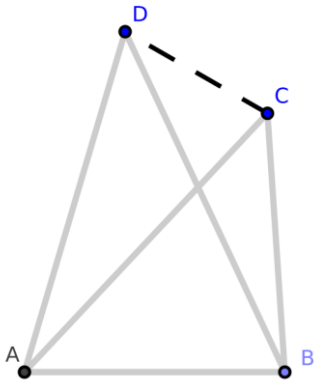
1- اثبت [اللازمة. 1-6-1].

القضية 1-7- مثلثات متميزة.

لأي مثلثين مختلفين، إذا ساوى ضلعان في مثلث ضلعين في الآخر، على التوالي، فإن الضلع الثالث من الأول لا يساوي ما يناظره في الثاني.

نص القضية بطريقة أخرى: لأي قطعتين منشئتين من نهايتي قطعة مستقيمة ويلتقيان في نقطة، لا يمكن إنشاء قطعتين أُخريين من نهايتي نفس القطعة ويلتقيان في نقطة على نفس الجانب النقطة السابقة ويكونان مساويتين للقطعيتين السابقتين، على التوالي.

الإثبات أنشئ المثلثين المختلفين ADB ▲، ACB ▲ المشتركان في القاعدة $\overline{AB}$. افترض أن $AD = AC$. ندعي أن $BC \neq BD$.



الشكل 1-4-8: [1-7]، حالة 1

قد تكون رأس المثلث الثاني إما داخل أو خارج المثلث الأول.

الحالة 1: الرأس خارج المثلث.

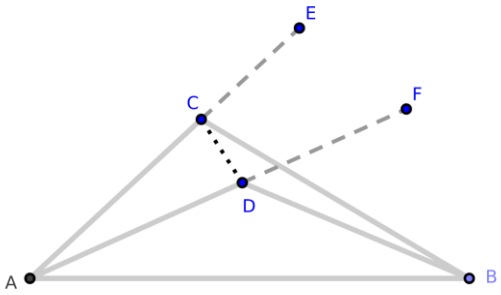
افترض أن رأس كل مثلث يقع خارج الجزء الداخلي من المثلث الآخر (أي، D لا تقع داخل ACB ▲ وC لا تقع داخل ADB ▲). أنشئ $\overline{CD}$. لأن $AD = AC$ حسب الفرضية، ACD ▲ متساوي الساقين. حسب [اللازمة 1-6-1]، $\angle ACD = \angle ADC$.

بما أنّ $\angle ADC = \angle BDC$ و$\angle ADB > 0$ ، نتيجةً لذلك، $\angle ADC > \angle BDC$ [1-3-1 موضوعة 12]. ولأن $\angle ACD = \angle ADC$ ، فإن، أيضًا، $\angle ACD > \angle BDC$. بما أن $\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD$ ، فإن $\angle BCD > \angle BDC$.

فيما يخص BDC ▲. بما أن $\angle BCD > \angle BDC$، حسب [اللازمة 1-6-1] نجد أن $BD \neq BC$ ، هذا يثبت ادعاءنا.

الحالة 2: الرأس داخل المثلث الآخر.

افترض أن رأس المثلث ADB ▲ يقع داخل الجزء الداخلي من ACB ▲. مد $\overline{AC}$ لإنشاء $\overline{AE}$ و $\overline{AD}$ لإنشاء $\overline{AF}$. أنشئ $\overline{CD}$. لأن $AD = AC$ حسب الفرضية، فإن المثلث ACD ▲ متساوي الساقين؛ حسب [1-5] $\angle ECD = \angle FDC$



الشكل 1-4-9: [1-7]، الحالة 2

بما أن $\angle ECD = \angle ECB + \angle BCD$ ، نستنتج من ذلك أن $\angle ECD > \angle BCD$ [1-3-1 موضوعة 12]. لأن $\angle ECD = \angle FDC$ ، فإن، أيضًا $\angle FDC > \angle BCD$. بما أن $\angle BDC = \angle BDF + \angle FDC$ ، نجد أن $\angle BDC > \angle BCD$.

فيما يخص BDC ▲. بما أنّ $\angle BDC > \angle BCD$، حسب [اللازمة 1-6-1]، نجد أن $BD \neq BC$، هذا يثبت ادعاءنا ويكمل الإثبات.

اللازمة 1-7-1. يكون أي مثلثين مختلفين، إذا لم يتساو طول أحد أضلاع أحدهما مع طول أي ضلع في الثاني.

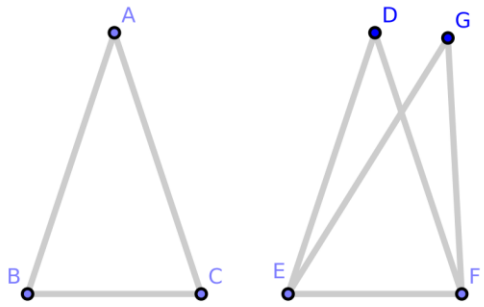
تمارين

1- اثبت [اللازمة. 1-7-1].

القضية 1-8- مبرهنة "ضلع-ضلع-ضلع" لتطابق المثلثات.

لأي مثلثين، إذا كانت كل الأضلاع المتناظرة متساوية، فإن المثلثين متطابقين.

الإثبات: افترض أن ▲ ABC و ▲ DEF مثلثين فيهما DE = AB و DF = AC و EF = BC (حيث $\overline{BC}$ و $\overline{EF}$ هما قاعدتا المثلثين). ندعي أن: ▲ DEF ≅ ▲ ABC .



الشكل 1-4-10: [1-8]

افترض وضع ▲ ABC على ▲ DEF بشرط أن تتطابق النقطة B مع النقطة E ويتطابق $\overline{BC}$ مع $\overline{EF}$. لأن BC = EF، فإن النقطة C تتطابق مع النقطة F. إذا كان الرأس A يقع على نفس الجانب من $\overline{EF}$، الذي تقع عليه الرأس D، فيجب أن تتطابق النقطة A مع النقطة D.

إذا لم يكن هذا صحيحًا، فيجب أن يكون لـ A موقع مختلف: سنسمي هذه النقطة G. فرضيتنا تنص على أن AB = ED و EG = AB. حسب [1-3-1 موضوعة 8]، فإن ED = EG. وبالمثل، FD = FG. ومع ذلك، حسب [1-7]، FD ≠ FG، وهذا تناقض.

ومن ثم يجب أن تتطابق النقطة A مع النقطة D، وبالتالي فإن الزوايا الثلاث للمثلث الأول تساوي، على التوالي، زوايا المثلث الثاني (على وجه التحديد، ∠DEF = ∠ABC و ∠EDF = ∠BAC و ∠EFD = ∠BCA). لذلك، ▲ DEF ≅ ▲ ABC.

أسئلة الامتحان.

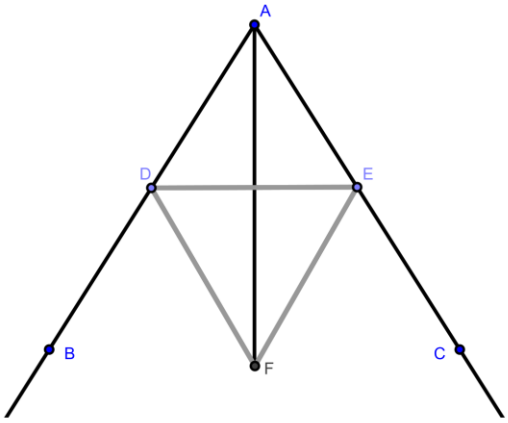
1- ما فائدة [1-7] في هذه القضية؟ (الجواب: كانت توطئة لـ[1-8].)

2- هل يمكن دمج [1-7] و [1-8] في قضية؟ وإذا كان ممكنًا، كيف؟

القضية 1-9 تنصيف زاوية مستقيمة.

من الممكن، تنصيف زاوية.

الإثبات أنشئ ∠BAC، والنقطة D على $\overrightarrow{AB}$ ، والنقطة E على $\overrightarrow{AC}$ ، بشرط أن AD = AE [3-1]. أنشئ $\overline{DE}$ ؛ أنشئ، أيضًا، المثلث المتساوي الأضلاع ▲ DEF [1-1] بشرط أن تقع F على الجانب الآخر من $\overline{DE}$ ، الذي لا تقع عليه A. أنشئ $\overline{AF}$. ندعي أن $\overline{AF}$ ينصف ∠BAC .



الشكل 1-4-11: [1-9]

فيما يخص▲ DAF و ▲ EAF: كل مثلث يشارك الضلع $\overline{AF}$ و AE = AD حسب الإنشاء، و DF = EF حسب الإنشاء. حسب [1-8]، ▲ DAF ≅ ▲ EAF، وهكذا، فإن ∠DAF = ∠EAF. لاحظ أن

$$\angle BAC = \angle DAF + \angle EAF$$

$$= 2.\angle DAF$$

$$\frac{1}{2}.\angle BAC = \angle DAF$$

أو، $\overline{AF}$ ينصف ∠BAC ، وهذا يكمل البرهان.

اللازمة 1-9-1. إذا مُد $\overline{AF}$ لإنشاء الخط $\overleftrightarrow{AF}$ ، فإن $\overleftrightarrow{AF}$ محور التماثل AED ▲ و DEF ▲ والشكل BDAEC، والقطعة $\overline{DE}$.

اللازمة 1-9-2. في [1-9]، يمكن إنشاء $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ كخطوط أو أشعة أو قطع بطول مناسب بحيث تكون النقطة A الرأس، مع إجراء ما يلزم من تعديل.

أسئلة الامتحان.

1- لماذا يبني إقليدس مثلث متساوي الأضلاع على الضلع المقابل لـ A؟

2- إذا أنشئ المثلث المتساوي الأضلاع على الجانب الآخر من $\overline{DE}$، في أي حالة سيفشل الإنشاء؟

تمارين

1- أثبت [1-9] دون استخدام [1-8]. (تلميح: استخدم [1-5، 2#].)

2- اثبت أن $\overline{\mathrm{DE}} \perp \overline{\mathrm{AF}}$. (تلميح: استخدم [1-5، 2#].) [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

3- أثبت أن أي نقطة على $\overline{\mathrm{AF}}$ ، تكون متساوية البعد عن النقطتين D و E. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

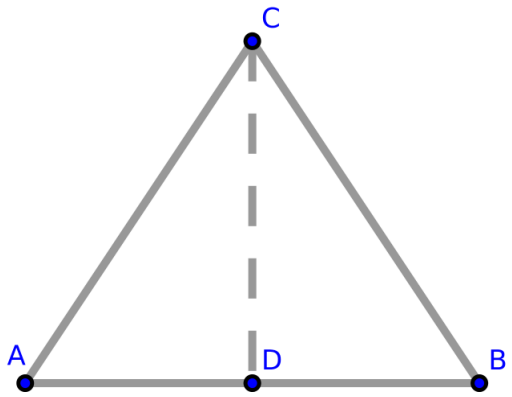
4- اثبت [اللازمة. 1-9-1].

5- اثبت [اللازمة. 1-9-2].

القضية 1-10. تنصيف قطعة.

من الممكن تنصيف أي قطعة (أي أنه من الممكن تحديد نقطة منتصف لأي قطعة).

الإثبات أنشئ $\overline{AB}$؛ ندعي أنه يمكن تنصيف $\overline{AB}$.



الشكل 1-4-12: [1-10]

أنشئ المثلث المتساوي الأضلاع ABC ▲ الذي قاعدته $\overline{AB}$ [1-1]. نَصِّف ∠ACB عن طريق إنشاء $\overline{CD}$ [1-9] التي تتقاطع مع $\overline{AB}$ عند D. من الواضح أن $\overline{AB} = \overline{AD} \oplus \overline{DB}$. ندعي أن $AB = 2 \cdot AD = 2 \cdot DB$ (أي أن $\overline{AB}$ مُنصّف عند D).

فيما يخص ▲ACD و▲BCD : $AC = BC$ (لأن كل منهما ضلع في المثلث المتساوي الأضلاع ▲ACB)؛ كل مثلث يشارك $\overline{CD}$ ؛ ∠BCD = ∠ACD حسب الإنشاء. حسب [1-4]، ▲BCD ≅ ▲ACD ، لذلك $AD = DB$. بالتالي،

$$AB = AD + DB = 2 \cdot AD = 2 \cdot DB$$

وهذا يثبت ادعاءنا.

تمارين

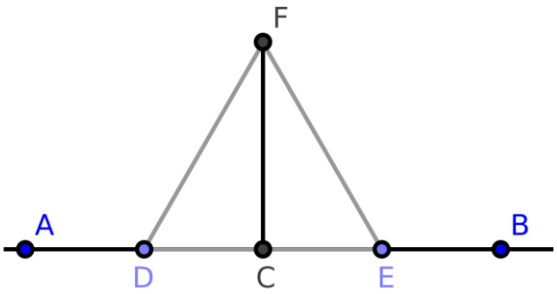
1- نصّف قطعة بإنشاء دائرتين. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- مد $\overline{CD}$ لإنشاء $\overleftrightarrow{CD}$. اثبت أن كل النقاط متساوية البعد عن النقطتين A و B تقع على $\overleftrightarrow{CD}$. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

القضية 1-11. أنشئ قطعة عمودية I.

من الممكن إنشاء قطعة عمودية على أي خط من أي نقطة عليه.

الإثبات أنشئ $\overleftrightarrow{AB}$ الذي يحتوي على النقطة C. على $\overrightarrow{CA}$ ، اختر أي نقطة D؛ على $\overrightarrow{CB}$ ، اختر E بشرط أن $CE = CD$ [1-3]. أنشئ المثلث متساوي الأضلاع ▲DFE على $\overline{DE}$ [1-1] وأنشئ $\overline{CF}$. ندعي أن $\overline{CF} \perp \overleftrightarrow{AB}$.



شكل 1-4-13: [1-11]

فيما يخص▲DCF و ▲ECF: كل مثلث يشارك الضلع $\overline{CF}$ و $CE = CD$ حسب الإنشاء و $EF = DF$ لأن ▲DFE متساوي الأضلاع. حسب [1-8] ▲ECF ≅ ▲DCF ، ولذلك ∠ECF = ∠DCF. بما أن هاتين الزاويتين متجاورتان، فإن [تعريف. 1-13] ينص على أن كل زاوية منهما هي زاوية قائمة، وهذا يثبت ادعاءنا.

اللازمة 1-11-1. [1-11] تظل صحيحة إذا كانت $\overleftrightarrow{AB}$ قطعةً أو شعاعًا و / أو عندما تكون $\overline{CF}$ خطًا مستقيمًا أو شعاعًا، مع ما يلزم من التبديل والتعديل.

تمارين

1- اثبت أن قطري المعين ينصفان بعضهما البعض عموديًا. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- اثبت [1-11] دون استخدام [1-8].

3- جد نقطة على أي خط تكون متساوية البعد عن أي نقطتين. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

4- جد نقطة على أي خط بشرط إذا وصلت بنقطتين على جانبي الخط، فإن الخط ينصف الزاوية المتكونة بالقطعتين الواصلتين بين النقطة والنقطتين. (تلميح: مشابه لإثبات #3)

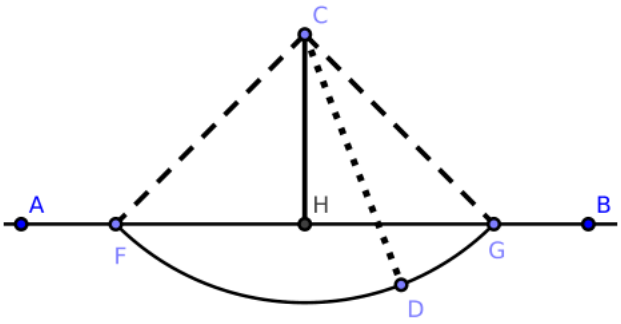
5- جد نقطة متساوية البعد عن أي ثلاث نقاط. (تلميح: أنت تبحث عن المركز المحيطي للمثلث.)

6- اثبت [اللازمة. 1-11-1].

القضية 1-12 إنشاء قطعة عمودية II.

يمكن إنشاء قطعة عمودية على أي خط من نقطة ليست على الخط.

الإثبات أنشئ $\overline{AB}$ و C بشرط ألا تكون C على $\overleftrightarrow{AB}$. نرغب في إنشاء $\overline{CH}$ بشرط أن تقع H على $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overline{CH} \perp \overleftrightarrow{AB}$



الشكل 1-4-14: [1-12]

خذ أي نقطة D من على جانب $\overleftrightarrow{AB}$ المقابل للجانب الذي تقع عليه نقطة C. أنشئ ●C التي نصف قطرها $\overline{CD}$ [مسلمة 1-3] حيث تتقاطع ●C مع $\overleftrightarrow{AB}$ عند النقطتين F و G. نصف $\overline{FG}$ عند H [1-10] وأنشئ $\overline{CH}$ [**قضية** 1-1]. ندعي أن: $\overline{CH} \perp \overleftrightarrow{AB}$.

أنشئ ▲CFG. فيما يخص ▲FHC و ▲GHC: $FH = GH$ حسب الإنشاء، المثلثان يتشاركان الضلع $\overline{HC}$ ، $CF = CG$ لأن كل منهما نصف قطر لـ ●C [تعريف 1-32]. حسب [1-8]، ▲FHC ≅ ▲GHC ولذلك $\angle CHF = \angle CHG$. بما أن هاتين الزاويتين متجاورتان، حسب [تعريف. 1-13] فإن كل منهما زاوية قائمة، هذا يثبت ادعاءنا.

اللازمة 1-12-1. [1-12] صحيحة إذا استُبدل بـ CH و / أو AB أشعة، مع ما يلزم من التبديل والتعديل.

تمارين

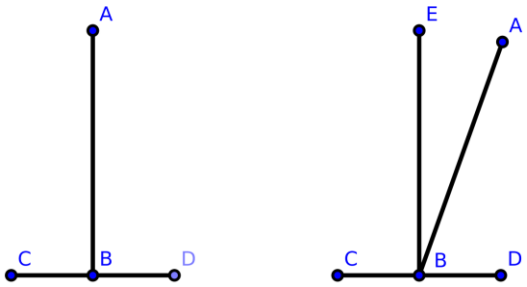
1- برهن على أن الدائرة ● C لا يمكنها أن تتقاطع مع $\overleftrightarrow{AB}$ عند أكثر من نقطتين. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- اثبت [اللازمة. 1-12-1]

القضية 1-13. الزوايا عند تقاطعات الخطوط المستقيمة.

إذا تقاطع خط مع آخر، فإن الخطين إما أن يكونا متعامدين أو يكون مجموع أي زاويتين متجاورتين عند تقاطعهما يساوي زاويتين قائمتين.

الإثبات إذا تقاطع الخط $\overleftrightarrow{AB}$ مع الخط $\overleftrightarrow{CD}$ عند B، فإننا ندعي أن كل من ∠ABC و ∠ABD يساوي زاوية قائمة أو ∠ABC + ∠ABD يساوي زاويتين قائمتين.



الشكل 1-4-15: [1-13] الحالة الأولى على اليسار، الحالة الثانية على اليمين

إذا كان $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ كما في الشكل 1-4-15، فإن كل من ∠ABC و ∠ABD تساوي زاوية قائمة.

بخلاف ذلك، كل من ∠ABC و ∠ABD ليست زاوية قائمة كما في الشكل 1-4-15. أنشئ $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

[1-11]. لاحظ أن $\angle ABC = \angle CBE + \angle EBA$ [تعريف 1-11]. بإضافة ∠ABD لكل جانب من هذه المعادلة، نحصل على

$$\angle ABC + \angle ABD = \angle CBE + \angle EBA + \angle ABD$$

وبالمثل، نجد أن

$$\angle CBE + \angle EBA + \angle ABD = \angle CBE + \angle EBD$$

حسب [1-3-1 موضوعة 8]، نجد أن

$$\angle ABC + \angle ABD = \angle CBE + \angle EBD$$

بما أنّ ∠CBE و ∠EBD زاويتان قائمتان، فإن مجموع $\angle ABC + \angle ABD$ يساوي مجموع زاويتين قائمتين، هذا يثبت ادعاءنا.

إثبات بديل:

الإثبات. أشر إلى ∠EBA بـ θ . لاحظ أن:

$$\angle CBA = \text{زاوية قائمة} + \theta$$

$$\angle ABD = \text{زاوية قائمة} - \theta$$

$$\angle CBA + \angle ABD = \text{زاوية قائمة}$$

اللازمة 1-13-1. القضية أعلاه تظل صحيحة إذا استُبدل بالخطوط المستقيمة قطع و / أو أشعة، مع ما يلزم من التبديل والتعديل.

اللازمة 1-13-2. مجموع أي زاويتين مكملتين لبعضهما البعض يساوي زاويتين قائمتين.

اللازمة 1-13-3. لا يمكن أن يتقاطع خطان مستقيمان مختلفان في قطعة.

اللازمة 1-13-4. مُنصف أي زاوية ينصف زاويتها المنعكسة.

اللازمة 1-13-5. مُنصفا أي زاويتين مكملتين لبعضهما البعض، متعامدان.

اللازمة 1-13-6- الزاوية $\angle \mathrm{EBA} = \frac{1}{2}(\angle \mathrm{CBA} - \angle \mathrm{ABD})$

تمارين

1- اثبت [اللازمة. 1-13-1].

2- اثبت [اللازمة. 1-13-2].

3- اثبت [اللازمة. 1-13-3].

4- اثبت [اللازمة. 1-13-4].

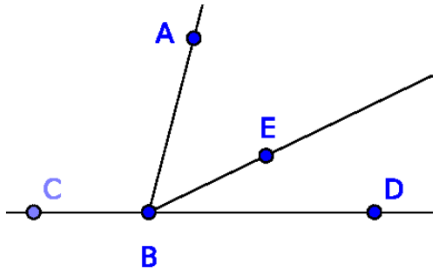
5- اثبت [اللازمة. 1-13-5].

6- اثبت [اللازمة. 1-13-6].

القضية 1-14 أشعة إلى خطوط مستقيمة.

إذا كان هناك شعاعان مبنيان عند نهاية شعاع آخر وعلى جانبين مختلفين منه بحيث يكون مجموع الزاويتين المتجاورتين يساوي زاويتين قائمتين، فإن هذين الشعاعين يشكلان خطًا.

الإثبات: أنشئ $\overrightarrow{BA}$. على جانبي $\overrightarrow{BA}$، أنشئ $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BD}$ بحيث يكون مجموع الزاويتين المتجاورتين، $\angle CBA + \angle ABD$ يساوي زاويتين قائمتين. ندعي أن: $\overrightarrow{BC} \oplus \overrightarrow{BD} = \overleftrightarrow{CD}$



الشكل 1-4-16: [14-1]

افترض بدلا من ذلك أن $\overrightarrow{BC} \oplus \overrightarrow{BE} = \overleftrightarrow{CE}$ و $\angle EBD > 0$. بما أن $\overleftrightarrow{CE}$ خط و $\overrightarrow{BA}$ واقف عليه، فإن المجموع $\angle CBA + \angle ABE$ يساوي زاويتين قائمتين [13-1]. أيضًا، حسب الفرضية، المجموع $\angle CBA + \angle ABD$ يساوي زاويتين قائمتين. لذلك،

$$\angle CBA + \angle ABE = \angle CBA + \angle ABD$$

$$\angle ABE = \angle ABD$$

$$\angle ABE = \angle ABE + \angle EBD$$

$$0 = \angle EBD$$

لأن $\angle EBD = 0$ و $\angle EBD > 0$ ، هذا تناقض. ومن ثم، $\overrightarrow{BC} \oplus \overrightarrow{BD} = \overleftrightarrow{CD}$ ، هذا يثبت ادعاءنا.

اللازمة 1-14-1. ما سبق ينطبق على القطع، مع ما يلزم من التبديل والتعديل.

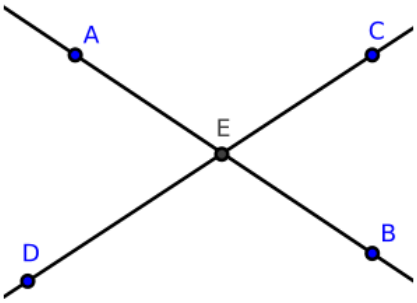
تمارين

1- اثبت [اللازمة. 1-14-1].

القضية 1-15- كل زاويتين متقابلتين متساويتين

إذا تقاطع خطان عند نقطة، فإن كل زاويتين متقابلتين متساويتين.

الإثبات افترض أن $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ يتقاطعان عند E. ندعي أن $\angle DEB = \angle AEC$ و $\angle DEA = \angle BEC$.



الشكل 1-4-17: [1-15]

لأن $\overleftrightarrow{AB}$ يتقاطع مع $\overleftrightarrow{CD}$ عند E ، فإن المجموع $\angle DEA + \angle AEC$ يساوي زاويتين قائمتين [1-13]. وبالمثل، لأن $\overleftrightarrow{CD}$ يتقاطع مع $\overleftrightarrow{AB}$ عند E، فإن المجموع $\angle AEC + \angle BEC$ يساوي أيضًا زاويتين قائمتين. وبالتالي،

$$\angle AEC + \angle DEA = \angle AEC + \angle BEC$$

$$\angle DEA = \angle BEC$$

وبالمثل، يمكننا أن نظهر أن $\angle AEC = \angle DEB$، هذا يثبت ادعاءنا.

إثبات بديل:

لأن الزاويتين المتقابلتين لهما نفس الزاوية المكملة، فإنهما متساويتان.

اللازمة 1-15-1. [1-15] تظل صحيحة إذا استُبدل بأحد الخطين المستقيمين أو كلاهما قطعة أو شعاع، مع ما يلزم من التبديل والتعديل.

أسئلة الامتحان لـ [1-13] - [1-15].

1- ما المسألة المطلوبة في إثبات إقليدس لـ [1-13]؟

2- ما المبرهنة المطلوبة؟ (الإجابة: لا مبرهنة، فقط موضوعات.)

3- إذا تقاطع خطان، فكم عدد أزواج الزوايا المكملة لبعضها البعض.

4- ما العلاقة بين [1-13] و [1-14]؟

5- ما الخطوط الثلاثة المتقاطعة في [1-14]؟

6- اذكر مقلوب القضية [1-15] واثبته.

7- ما موضوع [1-13]، [1-14]، [1-15]؟ (الإجابة: الزوايا عند نقطة.)

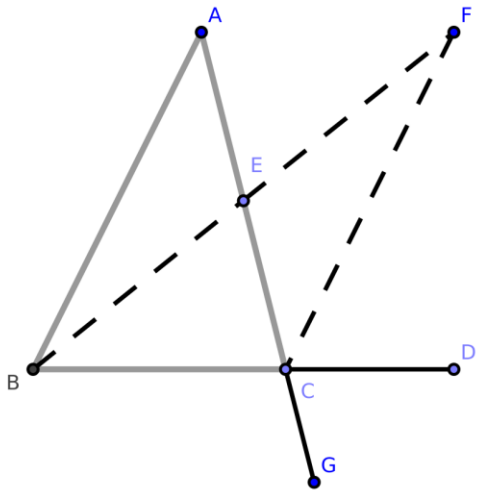
تمارين

1- اثبت [اللازمة. 1-15-1].

القضية 1-16. الزاوية الخارجية للمثلث أكبر من أي من الزوايا الداخلية عدا المجاورة لها.

إذا مد أي ضلع من أضلاع مثلث، فإن الزاوية الخارجية الناتجة تكون أكبر من أي من الزوايا الداخلية عدا المجاورة لها.

الإثبات أنشئ ABC ▲، مد الضلع $\overline{BC}$ لإنشاء $\overline{BD}$. ندعي أن الزاوية الخارجية ∠ACD أكبر من أي من الزوايا الداخلية عدا المجاورة لها؛ ∠ABC و ∠BAC .



الشكل 1-4-18: [1-16]

نصف $\overline{AC}$ عند E [1-10] وأنشئ $\overline{BE}$ [مسلمة 1-1]. مد $\overline{BE}$ لإنشاء $\overline{BF}$ بحيث إن $BE = EF$ [1-3]. أيضًا، أنشئ $\overline{CF}$.

فيما يخص▲CEF و ▲AEB: $EA = CE$ حسب الإنشاء، و $BE = EF$ حسب الإنشاء، و $\angle AEB = \angle CEF$ [1-15]. حسب [1-4]، ▲AEB ≅ ▲CEF، ولذلك فإن $\angle EAB = \angle ECF$. بما أنّ $\angle ACD = \angle ECF + \angle FCD$ و $\angle BAC = \angle EAB$ ،

$$\angle ACD = \angle EAB + \angle FCD = \angle BAC + \angle FCD$$

نستنتج من ذلك أن $\angle ACD > \angle BAC$.

وبالمثل، إذا نُصفت $\overline{BC}$ ، فيمكن إثبات أن $\angle ACD > \angle ABC$ ، وهذا يكمل الإثبات.

اللازمة 1-16-1. مجموع الزوايا الداخلية الثلاث للمثلث ▲BCF يساوي مجموع الزوايا الداخلية الثلاث للمثلث ▲ABC.

اللازمة 1-16-2. ▲ABC = ▲BCF.

اللازمة 1-16-3. إذا مُد الضلعان $\overline{BA}$ و $\overline{CF}$ لإنشاء خطين، فلن يلتقيا على أي بعد محدود.

السبب: إذا التقيا عند أي نقطة X، فحينئذٍ سيكون للمثلث ▲CAX زاوية خارجية ∠BAC تساوي الزاوية الداخلية ∠ACX.

التمارين.

1- اثبت [اللازمة. 1-16-1].

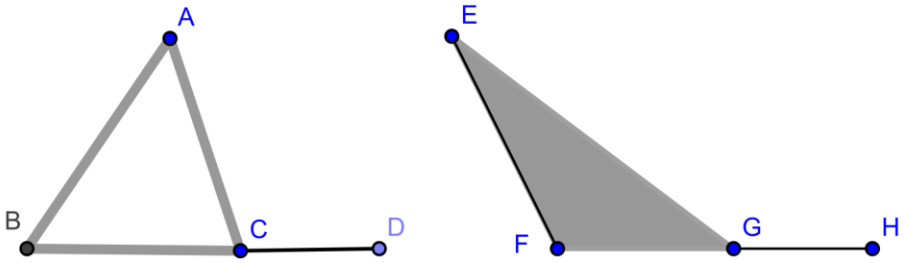
2- اثبت [اللازمة. 1-16-2].

3- اثبت [اللازمة. 1-16-3] باستخدام الإثبات بالتناقض.

القضية 1-17- مجموع زاويتين داخليتين في مثلث.

مجموع أي زاويتين داخليتين في مثلث أقل من زاويتين قائمتين.

الإثبات ندعي أن مجموع أي زاويتين داخليتين في ABC ▲ أقل من زاويتين قائمتين.



شكل 1-4-19: [1-17]

فيما يخص ∠ABC و ∠BAC، مد الضلع $\overline{BC}$ لإنشاء $\overline{BD}$. حسب [1-16]، ∠ACD > ∠ABC. أضف ∠ACB لكل منهما.

$$\angle ACD + \angle ACB > \angle ABC + \angle ACB$$

حسب [1-13]، ∠ACD + ∠ACB يساوي زاويتين قائمتين؛ وبالتالي، ∠ABC + ∠ACB أقل من زاويتين قائمتين.

وبالمثل يمكننا أن نبين أن المجموعين ∠BAC + ∠ABC و ∠BAC + ∠ACB كل منهما أقل من زاويتين قائمتين، مع ما يلزم من التبديل والتعديل. نفس الحِجَّة تنطبق على EFG ▲، هذا يثبت ادعاءنا.

اللازمة 1-17-1. أي مثلث فيه زاويتان حادتان، على الأقل.

اللازمة 1-17-2. لأي زاويتين غير متساويتين في مثلث، تكون الزاوية الأصغر حادة.

تمارين

1- اثبت [1-17] دون مد أي ضلع. (حاول الحل بعد الانتهاء من الفصل الأول. تلميح: استخدم مبرهنات الخطوط المتوازية.)

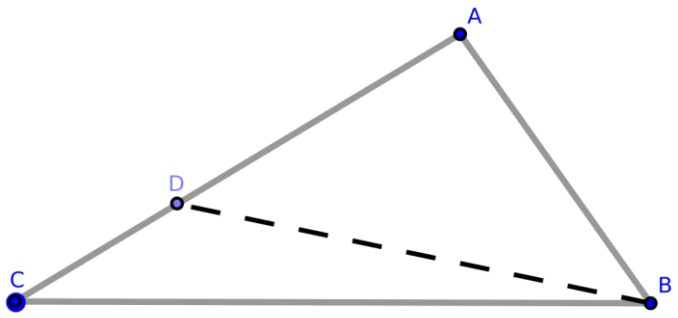
2- اثبت [اللازمة. 1-17-1]

3- اثبت [اللازمة. 1-17-2].

القضية 1-18. الزوايا والأضلاع في مثلث ا.

إذا كان أحد أضلاع مثلث أكبر من آخر، فإن قياس الزاوية المقابلة للضلع الأكبر يكون أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الأصغر.

الإثبات أنشئ ABC ▲ الذي له الضلعان $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ حيث $AC > AB$. ندعي أن قياس الزاوية المقابلة لـ $\overline{AC}$ أكبر من الزاوية المقابلة لـ $\overline{AB}$؛ أو، $\angle ABC > \angle ACB$



شكل 1-4-20: [1-18]

على $\overline{AC}$، حدد D بشرط أن $AD = AB$ [1-3]، وأنشئ $\overline{BD}$؛ لاحظ أن ABD ▲ متساوي الساقين. حسب [1-6]، $\angle ADB = \angle ABD$. لأن $\angle ADB > \angle ACB$ حسب [1-16]، $\angle ABD > \angle ACB$. لأن $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD$ ، فإن $\angle ABC > \angle ACB$، هذا يثبت ادعاءنا.

تمارين

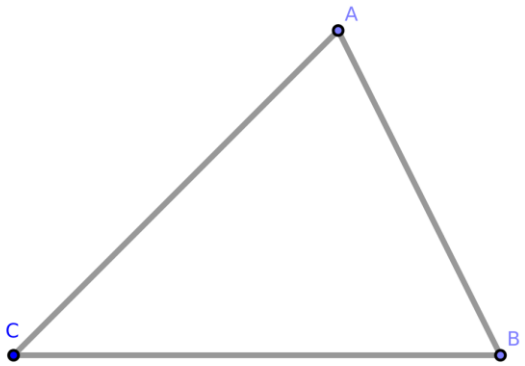
1- أثبت أنه إذا كان الضلعان الأكبر والأصغر في شكل رباعي متقابلين، فإن الزاويتين على أصغر تكون أكبر من الزاويتين المقابلتين لهما.

2- في أي مثلث، أثبت أن العمود من الرأس المقابل للضلع الأكبر يقع داخل المثلث.

القضية 1-19- الزوايا والأضلاع في مثلث I I.

في أي مثلث، إذا كانت إحدى الزوايا أكبر في القياس من أخرى، فإن الضلع المقابل للزاوية الأكبر يكون أطول من الضلع المقابل للزاوية الأصغر.

الإثبات أنشئ ABC ▲، حيث ∠ACB > ∠ABC. ندعي أن AB > AC.



شكل 1-4-21: [1-19]

إذا AB ≯ AC، فإما AB = AC أو AB < AC.

1- إذا كان AB = AC، فإن ACB ▲، متساوي الساقين و ∠ABC = ∠ACB [اللازمة 1-6-1]. هذا يناقض الفرضية ∠ACB > ∠ABC، ولذلك AB ≠ AC.

2- إذا كان AB < AC، فإن ∠ABC < ∠ACB [1-18]. هذا يناقض الفرضية ∠ACB > ∠ABC، ولذلك فإن AB ≮ AC.

لذلك، يجب أن AB > AC.

اللازمة 1-19-1. في أي مثلث، تقف الأضلاع الأطول مقابل الزوايا الداخلية الأكبر وتقف الزوايا الداخلية الأصغر مقابل الأضلاع الأصغر.

تمارين

1- اثبت هذه القضية باستخدام الإثبات المباشر.

2- اثبت أن أي قطعة من رأس مثلث متساوي الساقين إلى أي نقطة على القاعدة أقل من الساق إذا كان التقاطع داخل المثلث، ولكنها أكبر- من الساق- إذا كانت نقطة التقاطع مع القاعدة الممتدة تقع خارج المثلث.

3- اثبت أنه لا يمكن إنشاء ثلاث قطع متساوية ومختلفة من نفس النقطة إلى نفس الخط. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

4- فيما يخص [1-16]، الشكل 1-4-18: إذا كان $\overline{AB}$ هو أطول ضلع في ABC ▲، فإن $\overline{BF}$ هو أطول ضلع في FBC ▲ و $\angle BFC < \frac{1}{2} \angle ABC$.

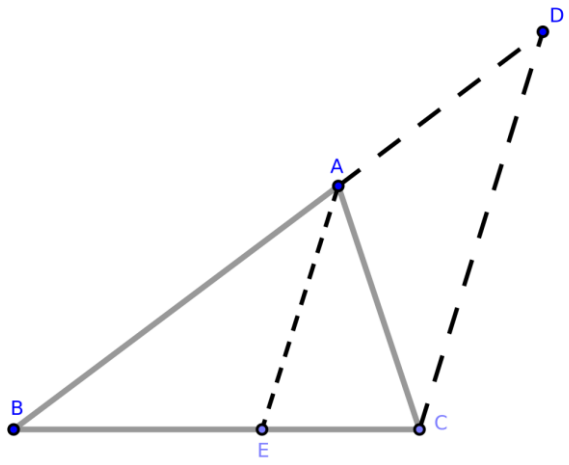
5- في ABC ▲ ، إذا AC ≤ AB، فإن $\overline{AG}$ المنشأة من A إلى أي نقطة G على الضلع $\overline{BC}$ ، أصغر من $\overline{AC}$. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

6- اثبت [اللازمة. 1-19-1].

القضية 1-20. مجموع أطوال أي زوج من أضلاع أي مثلث.

في أي مثلث، يكون مجموع أطوال أي زوج من الأضلاع أكبر من طول الضلع المتبقي.

الإثبات أنشئ ABC ▲ ، ندعي أن $AB + AC > BC$.



الشكل 1-4-22: [20-3]

مد $\overline{BA}$ لإنشاء $\overline{BD}$ بحيث إن $AD = AC$ [3-1]، وأنشئ $\overline{CD}$.

فيما يخص ACD ▲: حسب الإنشاء $AD = AC$، ولذلك، $\angle ACD = \angle ADC$ [5-1].لأن
$\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD$، $(\angle ACD = \angle ADC = \angle BDC) < \angle BCD$.حسب [19-1]، $BC < BD$.

لاحظ أن

$$\overline{AD} = \overline{AC}$$

$$\overline{BA} + \overline{AD} = \overline{BA} + \overline{AC}$$

$$\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AC}$$

ولذلك $BA + AC > BC$، هذا يثبت ادعاءنا.

إثبات بديل:

الإثبات أنشئ ABC ▲، ندعي أن $AB + AC > BC$. نَصّف ∠BAC عن طريق إنشاء $\overline{AE}$ [9-1]. ولذلك، $\angle EAC < \angle BEA$. ويترتب على ذلك أن $BA < BE$ [19-1]. وبالمثل، $AC < EC$. نستنتج من ذلك أن

$$BA + AC < BE + EC = BC.$$

هذا يثبت ادعاءنا.

تمارين

1- افترض أن a و b و c هي أطوال أضلاع أي مثلث. -أثبت أن:

$$|a - b| < c < (a + b)$$

2- أي طول أي ضلع من أي مضلع أصغر من مجموع الأضلاع الأخرى.

3- محيط أي مثلث أكبر من محيط أي مثلث مُدرج به inscribed و أصغر من أي مثلث محيط له circumscribed . (انظر أيضًا [تعريف 4-1].)

4- محيط أي مضلع أكبر من محيط أي مضلع مُدرج به (وأقل من محيط المضلع المحيط له) وله نفس عدد الأضلاع.

5- محيط الشكل الرباعي أكبر من مجموع قطريه. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

6- مجموع أطوال المتوسطات الثلاثة للمثلث أقل من $\frac{3}{2}$ المحيط: [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

القضية 1-21. مثلثات داخل مثلثات.

في أي مثلث، إذا أنشئت قطعتين من نهايتي قاعدته إلى أي نقطة داخل المثلث، فعندئذٍ:

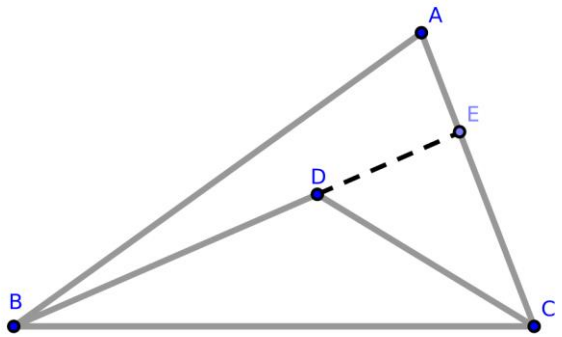
(1) مجموع طولي هاتين القطعتين أقل من مجموع الساقين.

(2) تحصر هاتان القطعتان زاوية أكبر من ساقي المثلث.

الإثبات أنشئ ABC ▲ الذي قاعدته $\overline{BC}$، وأنشئ D داخل ABC ▲. أخيرًا، أنشئ $\overline{BD}$ ، $\overline{CD}$. ندعي أن:

1- $BA + AC > BD + DC$

2- $\angle BDC > \angle BAC$



الشكل 1-4-23: [21-3]

الادعاء 1: $BA + AC > BD + DC$.

مد $\overline{BD}$ لإنشاء $\overline{BE}$ بحيث E تقع على $\overline{AC}$. في BAE ▲، نجد أن $BA + AE > BE$ [20-1]. نستنتج أن

$$BA + AC = BA + AE + EC > BE + EC$$

وبالمثل، في DEC ▲، نجد أن $DE + EC > DC$، نستنتج من ذلك أن

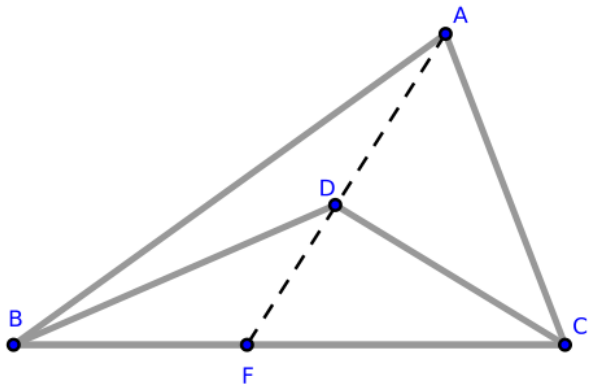
$$BE + EC = BD + DE + EC > BD + DC$$

من هاتين المتباينتين، نحصل على $BA + AC > BD + DC$، هذا يثبت الادعاء 1.

الادعاء 2: $\angle BAC < \angle BDC$.

حسب [16-1]، $\angle BEC < \angle BDC$. وعلى نحو مماثل، $\angle BAE < \angle BEC$. نستنتج أن
$(\angle BAE = \angle BAC) < \angle BDC$، هذا يثبت الادعاء 2 ويكمل الإثبات.

إثبات بديل للادعاء 2 لا يحتاج إلى مد الضلعين $\overline{BD}$ و $\overline{DC}$:



الشكل 1-4-24: [3-21 ، إثبات بديل]

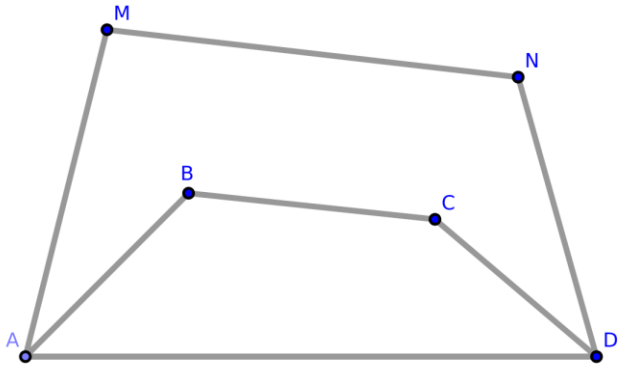
الإثبات أنشئ ABC ▲ و BDC ▲ على النحو الوارد أعلاه. أيضًا، أنشئ $\overline{AD}$ ومده ليتقاطع مع $\overline{BC}$ عند F. فيما يخص BDA ▲ و CDA ▲. حسب [1-16]، ∠BDF > ∠BAF و ∠FDC > ∠FAC: فإن

$$(\angle BDC) = (\angle BDF + \angle FDC) > (\angle BAF + \angle FAC) = (\angle BAC)$$

هذا يكمل الإثبات.

تمارين

1- مجموع أطوال الأضلاع المنشأة من أي نقطة داخل المثلث إلى رؤوسه أقل من محيط المثلث.



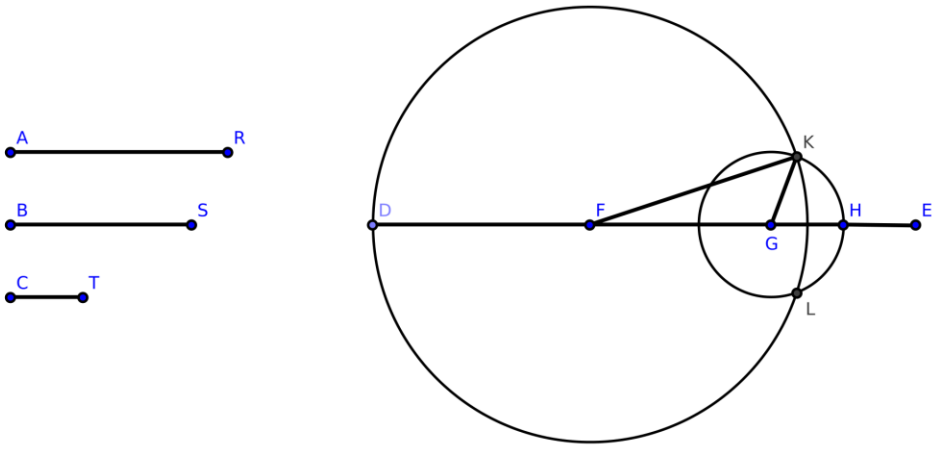
الشكل 1-4-25: [1-21، # 2]

2- إذا كان الخط المضلع المحدب ABCD يقع داخل الخط المضلع المحدب AMND وينتهي عند نهايتي الأول، أثبت أن طول ABCD أقل من طول AMND.

القضية 1-22. إنشاء مثلثات من قطع.

من الممكن إنشاء مثلث تساوي أضلاعه، على التوالي، أطوال أي ثلاث قطع، بشرط أن مجموع طولي أي زوج من القطع أكبر من طول القطعة المتبقية.

الإثبات افترض أن $\overline{AR}$ و $\overline{BS}$ و $\overline{CT}$ هم أي قطع ينطبق عليها شرط الفرضية.



الشكل 1-4-26: [1-22]

أنشئ $\overrightarrow{DE}$ بحيث يحتوي على القطع $AR = DF$ و $BS = FG$ و $CT = GH$ [1-3]. أنشئ الدائرة ●F التي مركزها F ونصف قطرها $\overline{DF}$ [الجزء 1-2، مسلمة 3]. أنشئ الدائرة ●G التي مركزها G ونصف قطرها $\overline{GH}$. تتقاطع ●G مع ●F في K. أنشئ $\overline{KF}$، $\overline{KG}$. ندعي أن ▲KFG هو المثلث المطلوب.

لأن F هي مركز ●F، $FK = FD$. لأن $AR = FD$ حسب الإنشاء، $AR = FK$. أيضًا، حسب الإنشاء، $BS = FG$ و $CT = KG$. لذلك، فإن الأضلاع الثلاثة للمثلث ▲KFG تساوي، على التوالي، القطع الثلاثة $\overline{AR}$ و $\overline{BS}$ و $\overline{CT}$ ، هذا يثبت ادعاءنا.

تمارين

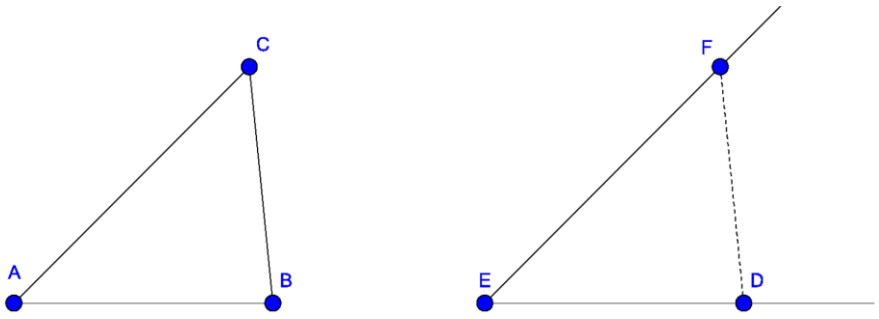
1- اثبت أنه عند تحقق الشروط المذكورة أعلاه يجب أن تتقاطع الدائرتان.

2- إذا كان مجموع أي قطعتين يساوي طول القطعة الثالثة، فأثبت أن القطع لن تتقاطع.

القضية 1-23. إنشاء زوايا متساوية.

من الممكن إنشاء زاوية مساوية لأي زاوية عند أي نقطة.

الإثبات لأي زاوية ∠DEF ونقطة A. ندعي أنه من الممكن إنشاء زاوية تساوي ∠DEF عند A.



الشكل 1-4-27: [1-23]

أنشئ $\overline{DF}$، وأنشئ المثلث ▲ BAC حيث $ED = AB$ و $EF = AC$ و $FD = CB$ [1-22]. حسب [1-8]، ▲ BAC ≅ ▲ DEF ، لذلك ∠BAC = ∠DEF .

تمارين

1- أنشئ المثلث، إذا علمت ضلعين فيه وزاوية بينهما. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- أنشئ المثلث، إذا علمت زاويتين فيه والضلع بينهما.

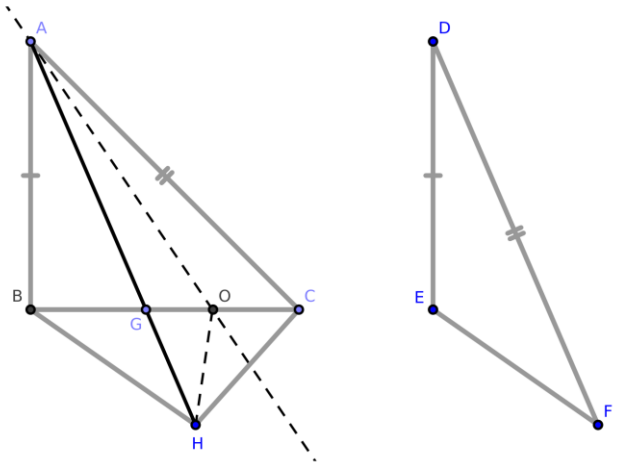
3- أنشئ المثلث، إذا علمت ضلعين فيه والزاوية المقابلة لأحدهما.

4- أنشئ المثلث، إذا علمت قاعدته وإحدى زاويتي القاعدة والمجموع أو الفرق بين أطوال الأضلاع.

القضية 1-24. الزوايا والأضلاع في مثلث III.

لأي مثلثين، إذا ساوى ضلعين في مثلث ضلعين في الآخر، على التوالي، وكانت الزاويتان المحصورتان بين كل ضلعين غير متساويتين. فإن الضلع الثالث للمثلث ذي الزاوية الداخلية الأكبر أطول من الضلع الثالث للمثلث ذي الزاوية الداخلية الأصغر.

الإثبات أنشئ مثلثين ABC ▲ و DEF ▲ حيث $DE = AB$ و $DF = AC$ و $\angle EDF < \angle BAC$. ندعي أن $EF < BC$.



شكل 1-4-28: [1-24]

أنشئ النقطة G على $\overline{BC}$ بحيث $\angle BAG = \angle EDF$، افترض أن $AB < AC$؛ حسب [1-19، # 5]، نجد أن $AG < AC$. مد $\overline{AG}$ لإنشاء $\overline{AH}$ حيث $AH = DF = AC$ [3-1].

أنشئ $\overline{BH}$ و $\overline{CH}$. في المثلثين، BAH ▲ و EDF ▲، حسب الإنشاء، $AB = DE$ و $AH = DF$ و $\angle BAH = \angle EDF$. حسب [4-1]، ▲ BAH ≅ ▲ EDF، لذلك، $BH = EF$.

لاحظ أن $\angle ACH > \angle BCH$، لأن $\angle ACH = \angle BCH + \angle BCA$. لأن $AH = AC$ حسب الإنشاء، ▲ ACH متساوي الساقين؛ وبالتالي، $\angle ACH = \angle AHC$ [5-1]. نستنتج من ذلك أن $\angle AHC > \angle BCH$. وبما أن، $\angle BHC = \angle BHA + \angle AHC$، فإن، $\angle BHC > \angle BCH$.

حسب [19-1]، $BC > BH$. لأن $BH = EF$ حسب ما سبق، فإن $BC > EF$ ، هذا يثبت ادعاءنا.

بدلاً من هذا الإثبات، يمكن إثبات الجزء الختامي لهذه القضية دون إنشاء $\overline{CH}$.

الإثبات. افترض الفرضيات وأنشئ المثلثين كما في الإثبات السابق، ندعي أن هذا الاثبات لا يتطلب إنشاء $\overline{CH}$.

لاحظ أن

$$BG + GH > BH\ [1-20]$$

و

$$AG + GC > AC\ [1-20]$$

لذلك

$$(BG + GH) + (AG + GC) > BH + AC$$

$$(BG + GC) + (AG + GH) > BH + AC$$

$$BC + AH > BH + AC$$

لأن $AH = AC$ و $BH = EF$ حسب الإنشاء، فإن

$$BC + AC > EF + AC$$

$$BC > EF$$

هذا يثبت ادعاءنا.

إثبات بديل:

الإثبات في ▲ABC، نصّف الزاوية ∠CAH عن طريق إنشاء $\overleftrightarrow{AO}$. في ▲CAO و ▲HAO، الضلعان $\overline{CA}$ و $\overline{AO}$ في مثلث يساويان، على التوالي، الضلعان $\overline{AH}$ و $\overline{AO}$ في الآخر، والزاويتان المحصورتان متساويتان. حسب [1-4]، $OH = OC$. ويترتب على ذلك أن $BO + OH = BO + OC = BC$. لكن $BO + OH > BH$ [1-20]، ولذلك، $BC > BH$. لأن $BH = EF$ ، $BC > EF$، هذا يثبت ادعاءنا.

ملاحظة. سيلاحظ القارئ الآن أن عدد المراجع الصريحة للتعريفات والموضوعات والنظريات قد تضاءل. هذا أمر طبيعي في الكتابة الرياضية. مع أنّها دون المستوى الأمثل للقارئ. مثل هذه الممارسة أمر طبيعي؛ لأن غير ذلك من شأنه أن يضع عبئًا مستحيلًا على الكاتب. سيتمنى أحد القراء لو أشرت إلى خصائص التباين للجمع والطرح في الإثبات السابق. قد يتعرض شخص آخر للإهانة إذا أوقفت الإثبات للاستشهاد بشيء واضح للغاية. ومع ذلك، سيسأل قارئ آخر لماذا افتُرضت خصائص التباين للجمع والطرح بدلاً من إثباتها. لا يوجد كاتب يستطيع أن يلبي المطالب المتناقضة. أفضل طريقة بالنسبة للمؤلف هو أن يتجاهل كل ما يراه واضحًا وأن يترك التحري للقارئ.

تمارين

1- اثبت هذه القضية عن طريق إنشاء الزاوية ∠ABH على يسار AB.

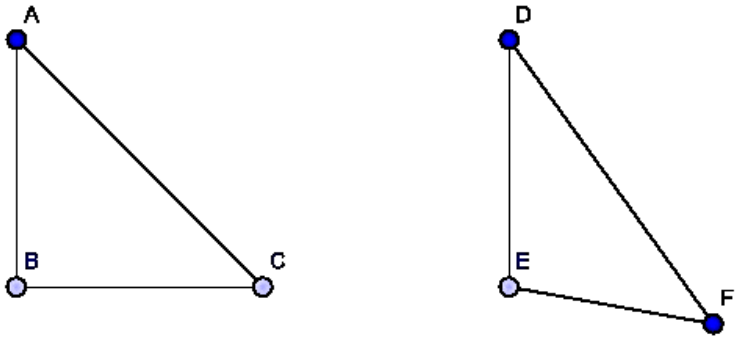
2- اثبت أن $\angle EFD < \angle BCA$.

القضية 1-25- الزوايا والأضلاع في المثلث IV.

إذا ساوى ضلعان في مثلث، على التوالي، ضلعان في آخر، وكان الضلع الثالث في أحدهما لا يساوي الضلع الثالث في الآخر، فإن المثلث ذا الضلع الثالث الأكبر، سيكون له زاوية داخلية أكبر من المثلث الآخر.

الإثبات أنشئ ABC ▲ و DEF ▲ بحيث إن DE = AB و DF = AC و EF < BC.

ندعي أن: ∠EDF < ∠BAC.



شكل 1-4-29: [1-25]

افترض بدلًا من ذلك أن ∠EDF = ∠BAC، لأن DE = AB و DF = AC حسب الإنشاء. حسب [1-4] DEF ▲ ≅ ABC ▲، ولذلك EF = BC. هذا يتناقض مع الفرضية EF < BC؛ لذلك، ∠EDF ≠ ∠BAC.

افترض أن ∠EDF < ∠BAC. لأن DE = AB و DF = AC. حسب [1-24]، EF < BC. هذا يتناقض مع الفرضية EF < BC؛ ولذلك، EDF ⊀ ∠BAC.

لأن ∠EDF ≮ ∠BAC و ∠EDF < ∠BAC ، هذا يثبت ادعاءنا.

اللازمة 1-25-1. أنشئ ABC ▲ و DEF ▲ حيث DE = AB و DF = AC. حسب [1-24] و [1-25]، EF < BC فقط إذا كانت ∠EDF < ∠BAC.

التمارين.

1- وضح هذه القضية باستخدام الإثبات المباشر بإنشاء قطعة على BC طولها يساوي EF.

القضية 1-26. تطابق المثلثات؛ ضلع وزاويتان داخليتان متساويتان.

إذا ساوى ضلع في مثلث ضلع في آخر، وساوت الزاويتان الداخليتان في أحدهما، على التوالي، الزاويتين الداخليتين في الآخر، فإن المثلثين متطابقان.

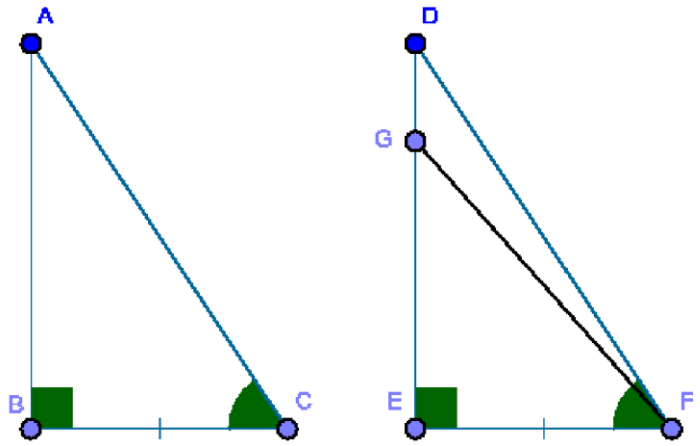
عادةً ما يُعبر عن هذه القضية في صورة مبرهنتين:

1- **التطابق "زاوية - ضلع - زاوية"**. إذا كان الضلعان اللذان يصلان بين الزاويتين المتساويتين في كل مثلث متساويين، فإن المثلثين متطابقان.

2- **التطابق "زاوية - زاوية- ضلع"**. إذا كان الضلعان اللذان لا يصل بين الزاويتين المتساويتين في كل مثلث متساويين، فإن المثلثين متطابقان.

سنثبت هذا القضية في الحالتين.

الإثبات أنشئ ABC ▲ و DEF ▲ حيث ∠DEF = ∠ABC و ∠EFD = ∠ACB. ندعي أنه إذا كان أحد أضلاع ABC ▲ مساويًا في الطول لضلع مناظر في DEF ▲، فإن DEF ▲ ≅ ABC ▲.



الشكل 1-4-30: [1-26]، حالة 1

الحالة 1 زاوية - ضلع - زاوية

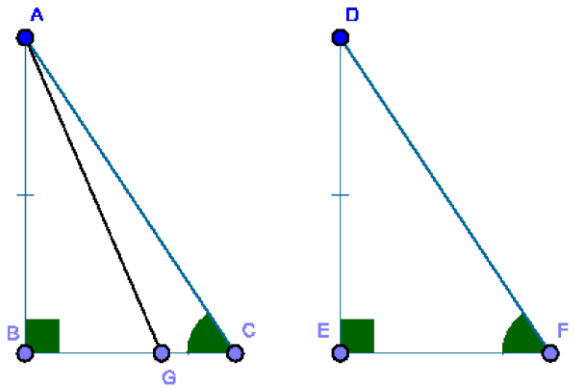
افترض أن EF = BC. إذا كان DE ≠ AB، افترض أن GE = AB حيث G هي نقطة على $\overline{DE}$ بشرط أن G ≠ D. أنشئ $\overline{GF}$، لاحظ أن 0 < ∠GFD. (إذا 0 = ∠GFD، فإن G = D، تناقض.)

في ABC ▲ و GEF ▲: GE = AB، EF = BC ، و ∠GEF = ∠ABC. حسب [1-4]، GEF ▲ ≅ ABC ▲، لذلك ∠GFE = ∠ACB. بما أنّ ∠DFE = ∠ACB حسب الفرضية، ∠DFE = ∠GFE و ∠DFE = ∠GFD + ∠GFE؛ بالتالي 0 = ∠GFD و 0 < ∠GFD، هذا تناقض. لذلك، DE = AB.

لأن DE = AB و EF = BC و∠DEF = ∠ABC ، حسب [1-4]، DEF ▲ ≅ ABC ▲.

حالة 2 زاوية - زاوية- ضلع

افترض أن $DE = AB$.



الشكل 1-4-31: [1-26]، حالة 2

إذا $EF \neq BC$، افترض أن $BG = EF$ حيث G هي نقطة على $\overline{BC}$ بشرط أن $G \neq C$. أنشئ $\overline{AG}$. في ▲ ABG و ▲ DEF: $DE = AB$ و $EF = BG$ و $\angle DEF = \angle ABG$. حسب [4-1]، ▲ DEF ≅ ▲ ABG، لذلك $\angle DFE = \angle AGB$. لأن $\angle DFE = \angle ACB$ حسب الفرضية، $\angle ACB = \angle AGB$. أي إن الزاوية الخارجية لـ ▲ ACG تساوي الزاوية الداخلية وغير المجاورة لها، وتتعارض مع [1-16]. لذلك $EF = BC$.

لأن $DE = AB$ و $EF = BC$ و $\angle DEF = \angle ABC$ ، حسب [4-1] ▲ DEF ≅ ▲ ABC.

هذا يثبت كلا الادعائيين، ويكمل الإثبات.

تمارين

1- اثبت أن نهايتي قاعدة المثلث المتساوي الساقين متساويتا البعد عن أي نقطة على القطعة العمودية من الزاوية الرأسية على القاعدة.

2- اثبت أنه إذا كان الخط الذي يُنصف الزاوية الرأسية لمثلث ينصف القاعدة أيضًا، فإن المثلث متساوي الساقين.

3- على أي خط مستقيم، جد نقطة بشرط أن يكون العمودان منها على أي خطين، متساويين. اذكر أيضًا عدد الحلول.

4- أثبت أنه إذا كان لأي مثلثين قائمين وترين متساويين، وكانت الزاوية الحادة لأحدهما تساوي الزاوية الحادة للآخر، فإنهما متطابقان.

5- اثبت أنه إذا كان لأي مثلثين قائمين وترين متساويين وكان أحد أضلاع أحدهما يساوي ضلع في الآخر، فإنهما متطابقان. (ملاحظة: هذا يثبت الحالة الخاصة لتطابق (ضلع-ضلع-زاوية) للمثلثات القائمة.)

6- منصفا الزاويتين الخارجيتين ومنصف الزاوية الداخلية الثالثة يتقاطعون.

7- مرورًا بأي نقطة، أنشئ خط مستقيم بشرط أن العمودين عليه من نقطتين على جانبين مختلفين منه، متساويان.

8- عبر أي نقطة، أنشئ خط مستقيم يتقاطع مع أي خطين ويشكل معهما مثلثًا متساوي الساقين.

5-1 الكتاب الأول، القضايا 27-48

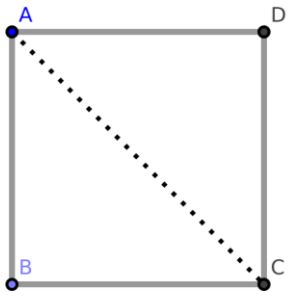
تعريفات إضافية بخصوص الخطوط المتوازية:

الخطوط المتوازية

40- أي خطين مستقيمين، في نفس المستوى، ولا يلتقيان أبدًا، يقال إنهما **متوازيان**. وإذا لم تلتق الأشعة أو القطع مهما مدت لإنشاء خطوط، يُقال أيضًا أنها **متوازية**.

41- **متوازي الأضلاع** هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين.

42- **القطر** هو القطعة التي تصل بين أي زاويتين متقابلتين في أي شكل رباعي. انظر الشكل 1-5-1.



الشكل 1-5-1: [تعريف 1-41] و [تعريف 1-42]: $\overline{AC}$ هي قطر المربع ABCD.

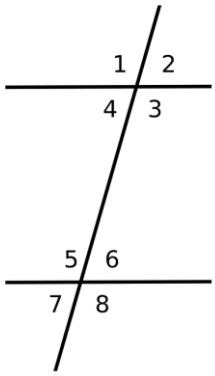
43- **ارتفاع المثلث** هو القطعة العمودية من قاعدة المثلث إلى الرأس المقابل لها.

45- **شبه المنحرف** هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متقابلان ومتوازيان.

46- عندما يتقاطع خط مستقيم مع خطين مستقيمين آخرين، يكون بينهم ثماني زوايا (انظر الشكل 1-5-2).

- الزاويتان 1 و2 زاويتان خارجيتان؛ وكذلك الزاويتان 7 و8.
- الزاويتان 3 و4 زاويتان داخليتان. وكذلك الزاويتان 5 و6.
- الزاويتان 4 و6 زاويتان متبادلتان. وكذلك الزاويتان 3 و5.
- الزاويتان 1 و5 زاويتان متناظرتان. وكذلك الزاويتان 2 و6، 3 و8، 4 و 7.

تظل هذه التعريفات صحيحة إذا استبدلنا بالخطوط أشعة أو قطع، مع ما يلزم من التبديل والتعديل.

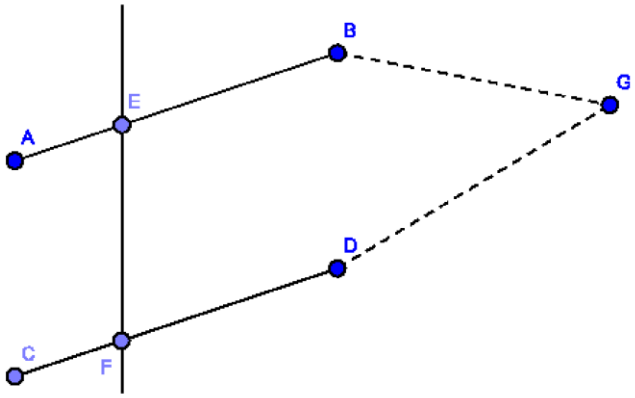


الشكل 1-5-2: [تعريف 1-46]

القضية 1-27. خطوط متوازية I

إذا تقاطع خط مع خطين آخرين وكانت الزوايا المتبادلة متساوية، فإن الخطين متوازيان.

الإثبات افترض أن $\overleftrightarrow{EF}$ يتقاطع مع $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ بحيث إن $\angle EFD = \angle AEF$. ندعي أن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.



الشكل 1-5-3: [1-27]

إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \nparallel \overleftrightarrow{CD}$ ، فإن $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ يتقاطعان عند النقطة G حيث يكون طول $\overline{BG}$ محدودًا.

يترتب على ذلك أن $\triangle EGF$ هو مثلث حيث $\angle AEF$ زاوية خارجية و $\angle EFG$ زاوية داخلية غير مجاورة. حسب [1-16]، $\angle AEF > \angle EFD$، لكن $\angle AEF = \angle EFD$ حسب الفرضية، هذا تناقض. لذلك، $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

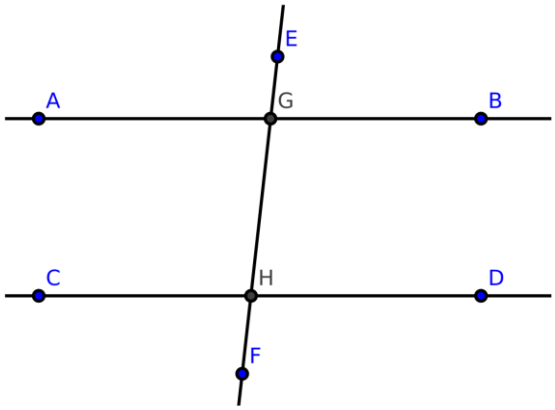
القضية 1-28- خطوط متوازية |||&||.

افترض أن خطًا يتقاطع مع خطين آخرين.

1) خطوط متوازية II. إذا كانت الزاوية الخارجية تساوي الزاوية الداخلية المناظرة، فإن الخطين متوازيان.

2) الخطوط المتوازية III. إذا كان مجموع الزاويتين الداخليتين على نفس الجانب يساوي زاويتين قائمتين، فإن الخطين متوازيان.

الإثبات افترض أن $\overleftrightarrow{EF}$ يتقاطع مع $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$.



الشكل 1-5-4: [1-28] و [1-29]

ادعاء 1: إذا $\angle GHD = \angle EGB$، فإننا ندعي أن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

لأن $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{EF}$ يتقاطعان عند G ، $\angle AGH = \angle EGB$ [1-15]. حسب الفرضية، $\angle AGH = \angle GHD$. بما أن هاتين الزاويتين متبادلتان، فإن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ حسب [1-27]، وهذا يثبت ادعاءنا.

الادعاء 2: إذا $\angle GHD + \angle BGH$ يساوي زاويتين قائمتين، ندعي أن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

بما أنّ $\angle AGH$ و $\angle BGH$ زاويتان متجاورتان، حسب [1-13] المجموع $\angle AGH + \angle BGH$ يساوي زاويتين قائمتين. بما أنّ $\angle BGH = \angle BGH$ ،

$$\angle BGH + \angle GHD = \angle BGH + \angle AGH$$

$$\angle GHD = \angle AGH$$

بما أنّ $\angle GHD$ و $\angle AGH$ زاويتان متبادلتان، $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ حسب [1-27]، هذا يثبت ادعاءنا ويكمل الإثبات.

القضية 1-29- خطوط متوازية IV

إذا تقاطع خط مع خطين متوازيين، فعندئذٍ:

(1) كل زاويتين متبادلتين متساويتان،

(2) الزوايا الخارجية تساوي الزوايا الداخلية المناظرة لها،

(3) مجموع أي زاويتين داخليتين على نفس الجانب يساوي زاويتين قائمتين.

الإثبات إذا تقاطع $\overleftrightarrow{EF}$ مع $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ وكان $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ ، فإننا ندعي أن:

(1) $\angle AGH = \angle GHD$ ($\angle BGH = \angle GHC$ ،مع ما يلزم من التبديل أو التعديل)

(2) $\angle EGB = \angle GHD$ ($\angle EGA = \angle GHC$ ، مع ما يلزم من التبديل أو التعديل)

(3) $\angle GHD + \angle HGB$ يساوي زاويتين قائمتين. ($\angle AGH + \angle GHC$ يساوي أيضًا زاويتين قائمتين، مع ما يلزم من التبديل أو التعديل)

الادعاء 1: إذا $\angle AGH \neq \angle GHD$، فإن إحدى الزاويتين يجب أن تكون أكبر من الأخرى. لذلك، افترض أن $\angle AGH > \angle GHD$. فإننا نحصل على المتباينة

$$\angle AGH + \angle BGH > \angle GHD + \angle BGH$$

حيث $\angle AGH + \angle BGH$ يساوي مجموع زاويتين قائمتين حسب [1-13].نستنتج من ذلك أن

$\angle GHD + \angle BGH$ أقل من زاويتين قائمتين. حسب إثبات [1-27]، $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ يلتقيان على بعد محدود، هذا يتعارض مع فرضية أن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. لذلك، $\angle AGH = \angle GHD$ ، هذا يثبت الادعاء 1.

ادعاء 2: لأن $\angle AGH = \angle EGB$ حسب [1-15] و $\angle AGH = \angle GHD$ حسب الادعاء 1، فإن $\angle EGB = \angle GHD$، وهذا يثبت الادعاء 2.

الادعاء 3. لأن $\angle AGH = \angle GHD$ حسب الادعاء 1،

$$\angle AGH + \angle HGB = \angle GHD + \angle HGB$$

بما أنّ $\angle AGH = \angle HGB$ يساوي مجموع قائمتين، فإن $\angle GHD + \angle HGB$ يساوي زاويتين قائمتين. هذا يثبت الادعاء 3 ويكمل الإثبات.

اللازمة 1-29-1. عبارات مكافئة تتعلق بالخطوط المتوازية.

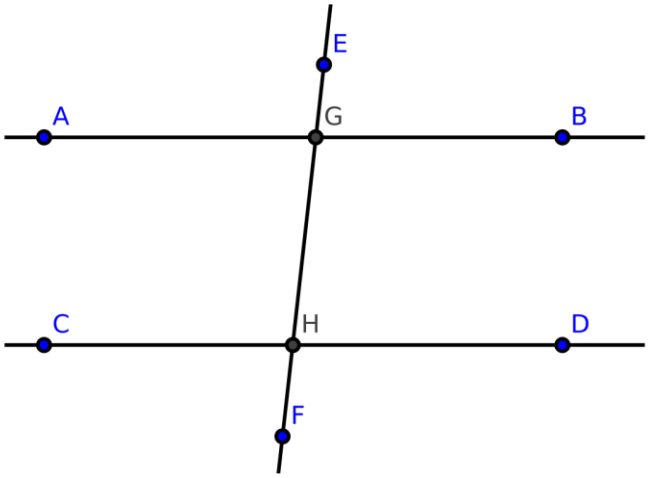
إذا تقاطع خط مع خطين آخرين، فإن الخطين متوازيين إذا وفقط إذا كان أي من هذه الخصائص الثلاثة:

(1) كل زاويتين متبادلتين متساويتان،

2) الزوايا الخارجية تساوي الزوايا الداخلية المناظرة لها

3) مجموع الزاويتين الداخليتين على نفس الجانب يساوي زاويتين قائمتين.

اللازمة 1-29-2. يمكن استبدال قطع ذات أطوال مناسبة أو أشعة بالخطوط في [1-29، اللازمة 1]، مع ما يلزم من التبديل والتعديل.



الشكل 1-5-5: [1-28] و [1-29]

تمارين

ملاحظة قد نستخدم [1-31] في إثباتات هذه التمارين لأن إثبات [1-31] لا يتطلب [1-29].

1- اثبت كلا جزأي [1-28] دون استخدام [1-27].

2- أنشئ $\overleftrightarrow{AB}$ الذي يحتوي على النقطة C و $\overleftrightarrow{EF}$ الذي يحتوي على النقطة D بحيث $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$. أنشئ $\overline{CH}$ و $\overline{CJ}$ بشرط أن $\overline{CJ}$ يُنصف ∠ACD و $\overline{CH}$ يُنصف ∠BCD. اثبت أن $DJ = DH$. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

4- إذا أنشئ أي قاطع آخر خلال نقطة المنتصف O لأي قاطع لخطين متوازيين، فإن الجزء المقطوع من القاطع الآخر بالخطين المتوازيين يُنصف عند O.

5- أي خطين يمران بنقطة متساوية البعد عن خطين متوازيين يقطعان قطعتين متساويين على المتوازيين. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

6-أنشئ محيط متوازي الأضلاع المكون عن طريق إنشاء موازيان لضلعين من مثلث متساوي الأضلاع من أي نقطة على الضلع الثالث. هذا المحيط يساوي 2 × الضلع.

7- إذا كان كل ضلعين متقابلين في شكل سداسي متساويين ومتوازيين، فاثبت أن أقطاره تتقاطع.

8- إذا وازت قطعتان متقاطعتان، على التوالي، قطعتين أخريين، فإن الزاويتين المحصورتين بين كل قطعتين متساويتين.

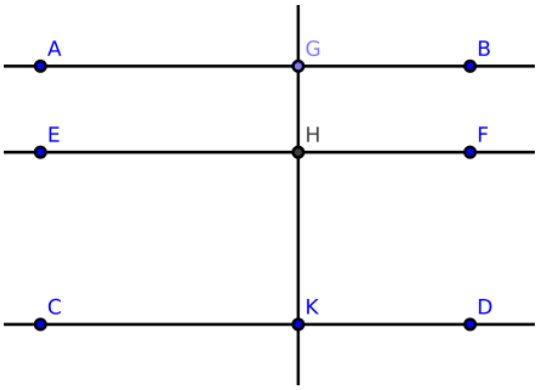
(تلميح: إذا وازى $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{AC}$ ، على التوالي، $\overleftrightarrow{DE}$ و $\overleftrightarrow{DF}$ و إذا تقاطع $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{DE}$ عند G ، فإن الزاويتين عند A و D يساويان الزاوية عند G [1-29] .)

القضية 1-30. التعدية للخطوط المتوازية.

الخطان الموازيان لنفس الخط متوازيان مع بعضهما البعض.

الإثبات. أنشئ الخطوط $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ و $\overleftrightarrow{EF}$ بحيث $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ و $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{AB}$. ندعي أن:

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.



الشكل 1-5-6: [1-30]

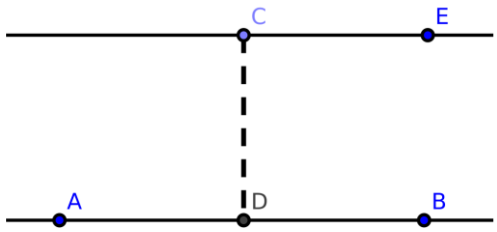
أنشئ أي خط قاطع $\overleftrightarrow{GHK}$. لأن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ ، $\angle AGH = \angle GHF$ [اللازمة 1-29-1]. لأن $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ ، $\angle GHF = \angle HKD$ [اللازمة 1-29-1]. نستنتج من ذلك أن $\angle AGH = \angle GHF = \angle HKD$. بما أنّ $\angle AGH = \angle AGK$ و $\angle HKD = \angle GKD$. حسب [1-27]، $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

اللازمة 1-30-1 يمكن استبدال قطع ذات أطوال مناسبة أو أشعة بـ $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ و $\overleftrightarrow{EF}$ و $\overleftrightarrow{GK}$ في [1-30]، مع إجراء التعديلات اللازمة.

القضية 1-31. إنشاء خط موازي.

نرغب في إنشاء خط موازي لأي خط مرورًا بأي نقطة ليست على الخط.

الإثبات لأي خط $\overleftrightarrow{AB}$ و أي نقطة C ليست عليه، نرغب في إنشاء الخط $\overleftrightarrow{CE}$ بحيث $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.



الشكل 1-5-7: [1-31]

حسب [1-23]، أنشئ D على $\overleftrightarrow{AB}$ ، و E ليست على $\overleftrightarrow{AB}$ بشرط أن بعد إنشاء $\overleftrightarrow{CE}$ ، $\angle DCE = \angle ADC$. حسب [اللازمة 1-29-1]، $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.

تمارين

1- إذا علمت ارتفاع مثلث وزاويتي قاعدته، أنشئ المثلث. [راجع الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- من أي نقطة، أنشئ قطعة على أي قطعة بشرط أن تكن الزاوية الناتجة مساوية في القياس لزاوية معينة. وضح أن هناك حلين.

3- اثبت صحة الإنشاء التالي: لتثليث خط معين $\overleftrightarrow{AB}$ ، أنشئ على $\overleftrightarrow{AB}$ ، ABC ▲ المتساوي الأضلاع. نصف الزاويتين عند النقطتين A و B بالخطين $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{BD}$. عبر D، أنشئ موازيين لـ $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ اللذين يتقاطعان مع $\overleftrightarrow{AB}$ عند E و F. ندعي أن E و F هما نقطتا التقسيم الثلاثي لـ $\overleftrightarrow{AB}$.

4- ادرج مربع في مثلث متساوي الأضلاع بشرط أن تكون قاعدته على ضلع معين من المثلث.

5- عبر أي نقطتين على خطين متوازيين، أنشئ القطعتين اللتين يشكلان مع الخطين المتوازيين معينًا.

6- بين أي خطين في أي موضع. أنشئ قطعة ذات أي طول بحيث تكون موازية لأي خط. بين أن هناك حلان.

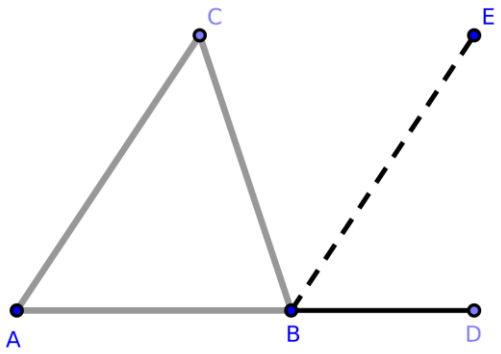
القضية 1-32. الزوايا الخارجية ومجموع الزوايا في مثلث.

إذا مُد ضلع مثلث، فإن

(1) الزاوية الخارجية تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين المقابلتين؛

(2) مجموع الزوايا الداخلية الثلاث يساوي زاويتين قائمتين.

الإثبات أنشئ ABC ▲، وأنشئ $\overline{AD}$ عن طريق مد الضلع $\overline{AB}$.



الشكل 1-5-8: [1-32]

الادعاء 1:$\angle CBD = \angle BAC + \angle ACB$

أنشئ $\overline{AC} \parallel \overline{BE}$ [1-31].بما أن $\overline{BC}$ يتقاطع مع $\overline{BE}$ و $\overline{AC}$ ، فإن $\angle EBC = \angle ACB$ [1-29] .بما أن $\overline{AB}$ يتقاطع مع $\overline{BE}$ و $\overline{AC}$ ، فإن $\angle DBE = \angle BAC$ [1-29]. بما أنّ، $\angle CBD = \angle EBC + \angle DBE$

$$\angle CBD = \angle ACB + \angle BAC$$

الادعاء 2: زاويتان قائمتان $= \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC$.

بجمع $\angle ABC$ لكل طرف من المعادلة في الادعاء 1، نحصل على

$$\angle ABC + \angle CBD = \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC$$

حسب [1-13]، فإن $\angle ABC + \angle CBD$ يساوي زاويتين قائمتين، ولذلك،

$$\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = \text{زاويتان قائمتان}$$

وهذا يكمل البرهان.

اللازمة 1-32-1. إذا كان المثلث القائم الزاوية متساوي الساقين، فإن كل زاوية للقاعدة تساوي نصف زاوية قائمة.

اللازمة 1-32-2. إذا ساوت زاويتان في مثلث زاويتين في آخر، على التوالي، فإن الزاويتين المتبقيتين متساويتان أيضًا.

اللازمة 1-32-3. بما أنه يمكن تقسيم أي شكل رباعي إلى مثلثين، فإن مجموع زواياه يساوي أربع زوايا قائمة.

اللازمة 1-32-4. إذا قُسم شكل له n أضلاع إلى مثلثات عن طريق رسم أقطار من أي من زواياه، فسنحصل على $(n-2)$ مثلثات. لذا، فإن مجموع زواياه يساوي $2(n-2)$ زوايا قائمة.

اللازمة 1-32-5. إذا مدت جميع أضلاع أي مضلع محدب، فإن مجموع الزوايا الخارجية يساوي أربع زوايا قائمة.

اللازمة 1-32-6. كل زاوية في مثلث متساوي الأضلاع تساوي ثلثي زاوية قائمة.

اللازمة 1-32-7. إذا كانت إحدى زوايا مثلث تساوي مجموع الزاويتين الأخريين، فهذه الزاوية قائمة.

اللازمة 1-32-8. يمكن تقسيم كل مثلث قائم الزاوية إلى مثلثين متساويي الساقين بواسطة خط مبني من الزاوية القائمة إلى الوتر.

تمارين

1- قسم زاوية قائمة ثلاثيًا.

2- إذا مدت أضلاع مضلع له n من الأضلاع، فإن مجموع الزوايا بين كل زوج متبادل (ضلع و ضلع ممتد) يساوي $2(n-4)$ زوايا قائمة

3- إذا كان الخط الذي يقسم زاوية رأسية خارجية لمثلث موازٍ لقاعدة المثلث، فإن المثلث يكون متساوي الساقين. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

4- إذا كان المثلثان القائمان ABC ▲ و ABD ▲ على نفس الوتر $\overline{AB}$ وإذا وصلت الرأسان C و D، فإن زوج الزوايا الواقفة مقابل أي ضلع من الشكل الرباعي الناتج متساويتان.

5- اثبت أن الارتفاعات الثلاثة للمثلث تتقاطع. ملحوظة: نحن نثبت وجود **المركز العمودي أو ملتقى الارتفاعات** للمثلث: النقطة التي تتقاطع فيها الارتفاعات الثلاثة، وإحدى **نقاط التلاقي** في المثلث. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

6- منصفات الزوايا المتجاورة في متوازي الأضلاع تتعامد مع بعضها البعض. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

7- تُشكل منصفات الزوايا الخارجية للشكل الرباعي شكلًا رباعيًا محيطيًا، مجموع كل زاويتين متقابلتين فيه يساوي زاويتين قائمتين.

8- إذا كانت الأضلاع الثلاثة لمثلث ما متعامدة على التوالي مع أضلاع مثلث آخر، فإن المثلثين متساويا الزوايا. (قد تؤجل هذه المسألة حتى نهاية الفصل 1.)

9- أنشئ المثلث القائم الزاوية، إذا علمت الوتر ومجموع أو فرق الأضلاع.

11- الزاوية المحصورة بين المنصف الداخلي لزاوية قاعدة لمثلث والمنصف الخارجي لزاوية القاعدة الأخرى تساوي نصف الزاوية الرأسية.

12- في إنشاء [1-18]، اثبت أن الزاوية ∠DBC تساوي نصف الفرق بين زاويتي القاعدة.

13- إذا كانت A, B, C تشير إلى زوايا مثلث، فاثبت أن $\frac{1}{2}(A+B)$ و $\frac{1}{2}(B+C)$ و $\frac{1}{2}(A+C)$ هي زوايا المثلث المكون من أي ضلع ومنصفي الزاويتين الخارجيتين بين هذا الضلع وامتداد الضلعين الآخرين.

14- اثبت [اللازمة. 1-32-1].

15- اثبت [اللازمة. 1-32-2].

16- اثبت [اللازمة. 1-32-3].

17- اثبت [اللازمة. 1-32-4].

18- اثبت [اللازمة. 1-32-5].

19- اثبت [اللازمة. 1-32-6].

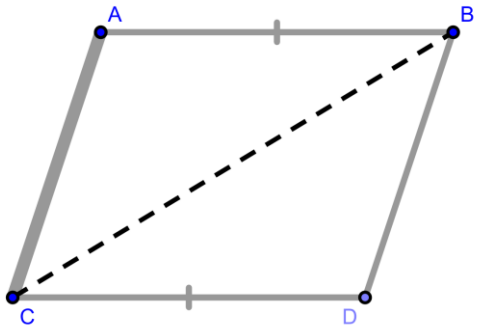
20. اثبت [اللازمة. 1-32-7].

21- اثبت [اللازمة. 1-32-8].

القضية 1-33. قطع متوازية.

القطعتان الواصلتين بين النهايتين المتجاورتين لقطعتين متساويتين ومتوازيتين يكونان متوازيتين ومتساويتين في الطول.

الإثبات افترض أن $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ و $AB = CD$. أنشئ الشكل ABDC. ندعي أن $AC = BD$ و $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.



الشكل 1-5-9: [1-33] و [1-34]

أنشئ $\overline{BC}$. لأن $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ حسب الفرضية و $\overline{BC}$ يتقاطع معهما، $\angle ABC = \angle DCB$ [اللازمة 1-29-1].

فيما يخص ▲ ABC و ▲ DCB: $AB = DC$، والمثلثان يشتركان في $\overline{BC}$ ، و $\angle ABC = \angle DCB$. حسب [1-4]، ▲ ABC ≅ ▲ DCB.

يترتب على ذلك أن $AC = BD$ و $\angle ACB = \angle CBD$. حسب [اللازمة 1-29-1]، $\angle ACB = \angle CBD$ تقتضي ذلك أن $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$، هذا يُكمل الإثبات.

اللازمة 1-33-1. [1-33] صحيحة للخطوط المستقيمة والأشعة، مع ما يلزم من التبديل والتعديل.

اللازمة 1-33-2. الشكل ABDC متوازي أضلاع [تعريف 1-39].

تمارين

1- أثبت أنه إذا القطعتان $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ متساويتين ومتوازيتين، على التوالي، مع $\overline{DE}$ ، $\overline{EF}$ ، فإن $\overline{AC}$ التي تصل نهايتي الزوج الأول تكون متساوية في الطول مع القطعة $\overline{DF}$ التي تصل نهايتي الزوج الأخير. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

القضية 1-34. الأضلاع والزوايا المتقابلة لمتوازيات الأضلاع.

كل ضلعين متقابلين، في متوازي الأضلاع، متساويان وكل زاويتين متقابلتين متساويتان أيضًا وكل قطر ينصف متوازي الأضلاع.

الإثبات أنشئ الشكل ABCD. ندعي أن:

(1) $AB = CD$ و $AC = BD$؛

(2) $\angle CAB = \angle CDB$.

(3) $\angle ACD - \angle ABD$

(4) أي من القطرين ($\overline{BC}$ أو $\overline{AD}$) ينصف متوازي الأضلاع.

أنشئ $\overline{BC}$. في $\blacktriangle ABC$ و $\blacktriangle DBC$: لأن $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ حسب الإنشاء و $\overline{BC}$ يتقاطع معهم، $\angle ABC = \angle DCB$ و $\angle ACB = \angle CBD$ [1-29]. أيضًا، $\blacktriangle ABC$ و$\blacktriangle DBC$ يشاركان الضلع $\overline{BC}$. حسب [1-26]، $\blacktriangle ABC \cong \blacktriangle DCB$: ولذلك $AB = CD$ و $AC = BD$ (الادعاء 1) و $\angle CAB = \angle CDB$ (الادعاء 2).

الآن، $\angle ACD = \angle ACB + \angle DCB$ و $\angle ABD = \angle CBD + \angle ABC$. بما أنّ $\angle ACB = \angle CBD$ و $\angle DCB = \angle ABC$ حسب [اللازمة 1-29-1]، نحصل على

$$\begin{aligned}\angle ACD &= \angle ACB + \angle DCB \\ &= \angle CBD + \angle ABC \\ &= \angle ABD\end{aligned}$$

(الادعاء 3).

لأن $\blacktriangle ABC \oplus DEF = \blacktriangle DBC$، $\blacktriangle ABC \cong \blacktriangle DCB$ و الشكل $ABCD$. يترتب على ذلك أن $\overline{BC}$ يُنصف الشكل $ABCD$. يمكن إثبات الحالة المتبقية بنفس الطريقة مع ما يلزم من التبديل والتعديل، إذا أنشئنا $\overline{AD}$ بدلاً من $\overline{BC}$ (الادعاء 4).

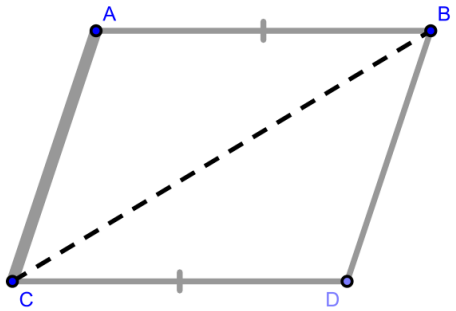
اللازمة 1-34-1. الشكل $ABDC = 2 \cdot \blacktriangle ACB = 2 \cdot \blacktriangle BCD$

اللازمة 1-34-2. إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع زاوية قائمة، فإن كل زاوية من زواياها قائمة.

اللازمة 1-34-3. إذا تساوي ضلعان متجاوران في متوازي الأضلاع، فهذا يعني أنه معين.

اللازمة 1-34-4. إذا كان كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي متساويين في الطول، فهذا يعني أنه متوازي أضلاع.

اللازمة 1-34-5. إذا كان كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي متساويتين، فهذا يعني أنه متوازي أضلاع.



اللازمة 1-34-6. إذا نصف القطران كل منهما الآخر في شكل رباعي، فإن هذا الشكل متوازي أضلاع.

اللازمة 1-34-7. إذا نصف القطران الشكل الرباعي، فإن الشكل متوازي أضلاع.

اللازمة 1-34-8. إذا تساوت الأضلاع المتجاورة في متوازي أضلاع، فإن القطرين ينصفان زوايا المتوازي.

اللازمة 1-34-9. إذا تساوت الأضلاع المتجاورة في متوازي الأضلاع، فإن قطريه يتقاطعان عموديًا.

اللازمة 1-34-10. في أي متوازي أضلاع قائم، القطران متساويان في الطول.

اللازمة 1-34-11. إذا كان قطري متوازي الأضلاع متعامدين، فإن متوازي الأضلاع معين.

اللازمة 1-34-12. إذا نصف قطر متوازي الأضلاع الزاويتين التي يصل بين رأسيهما، فإن متوازي الأضلاع معين.

تمارين

1- اثبت أن قطري متوازي الأضلاع ينصفان بعضهما البعض. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- إذا تساوى قطرا متوازي الأضلاع، فإن كل زاوية من زواياه قائمة. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

3- ستلتقي القطعتان الواصلتان بين كل نهايتين متجاورتين لقطعتين متوازيتين غير متساويتين عند مدهما على جانب القطعة المتوازية الأصغر.

4- إذا توازى ضلعان متقابلان في شكل رباعي، ولكنهما غير متساويين في الطول وكان الآخران متساويين ولكن غير متوازيين، فإن كل زاويتين متقابلتين مكملتين لبعضهما البعض.

5- أنشئ المثلث إذا علمت نقاط منتصف أضلاعه الثلاثة.

6- اثبت [اللازمة. 1-34-1].

7- اثبت [اللازمة. 1-34-2].

8- اثبت [اللازمة. 1-34-3].

9- اثبت [اللازمة. 1-34-4].

10- اثبت [اللازمة. 1-34-5].

11- اثبت [اللازمة. 1-34-6].

12- اثبت [اللازمة. 1-34-7].

13- اثبت [اللازمة. 1-34-8].

14- اثبت [اللازمة. 1-34-9].

15- اثبت [اللازمة. 1-34-10].

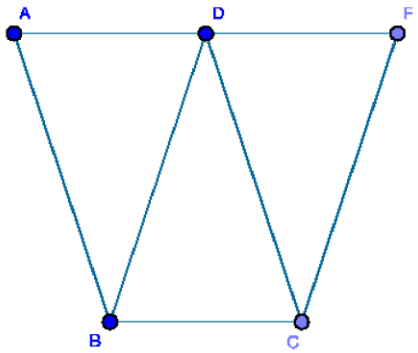
16- اثبت [اللازمة. 1-34-11].

17- اثبت [اللازمة. 1-34-12].

القضية 1-35. مساحات متوازيات الأضلاع I.

متوازيات الأضلاع على نفس القاعدة وبين نفس المتوازيين متساوية في المساحة.

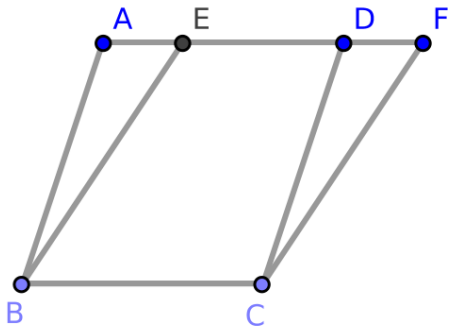
الإثبات سنثبت ثلاث حالات.



الشكل 1-5-10: [1-35]، حالة 1

الحالة 1: أنشئ الشكلين ABCD وFDBC على القاعدة $\overline{BC}$ وبين المتوازيان $\overline{AF}$ و$\overline{BC}$ حيث يشترك ABCD و FDBC في القاعدة والرأس عند D. ندعي أن ABCD = FDBC.

حسب [اللازمة 1-34-1]، FDBC = ▲BCD · 2 = ADCB ، هذا يثبت الحالة 1.



الشكل 1-5-11: [1-35]، حالة 2

الحالة 2: أنشئ ABCD و EFCB على القاعدة $\overline{BC}$ وبين المتوازيين $\overline{AF}$ و $\overline{BC}$ حيث يشترك ABCD و EFCB في القاعدة و $\overline{ED}$. ندعي أن ABCD = EFCB.

لأن ABCD متوازي أضلاع، AD = BC [1-34]؛ لأن BCEF متوازي أضلاع، EF = BC، وبالتالي AD = EF.
لاحظ أن

$$AD - ED = EF - ED$$

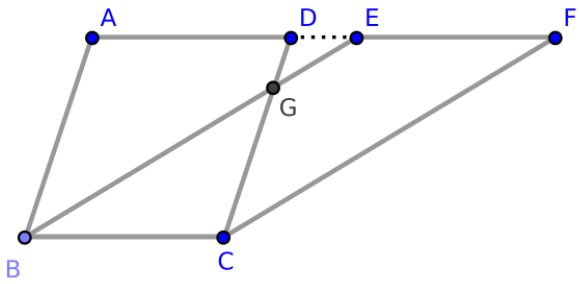
$$AE = DF$$

فيما يخص ▲ BAE و ▲ CDF: AE = DF و BA = CD [34-1] و ∠BAE = ∠CDF حسب [1-29، اللازمة. 1].
حسب [1-4]، ▲ BAE ≅ ▲ CDF. لاحظ أن

$$AFCB = EFCB + \blacktriangle BAE$$

$$= ABCD + \blacktriangle CDF$$

لأن ▲ BAE = ▲ CDF، ABCD = EFCB، هذا يثبت حالة 2.



الشكل 1-5-12: [1-35]، حالة 3

الحالة 3: أنشئ ABCD و FDBC على القاعدة $\overline{BC}$ وبين المتوازيين $\overline{AF}$ و $\overline{BC}$ حيث يشترك ABCD و EFCB في القاعدة والنقطة G حيث G ليس رأسًا. ندعي أن ABCD = EFCB.

لاحظ أن AD = BC = EF. لأن AD + DE = AE و DE + EF = DF و AD = EF، فإن AE = DF.

فيما يخص ▲ BAE و ▲ CDF: AE = DF، BA = CD، و ∠BAE = ∠CDF حسب [1-29]. حسب [1-4]، ▲ CDF ≅ ▲ BAE ويترتب على ذلك أن:

$$\blacktriangle BAE = \blacktriangle CDF$$

$$\blacktriangle BAE - \blacktriangle DEG = \blacktriangle CDF - \blacktriangle DEG$$

$$ADGB = CGEF$$

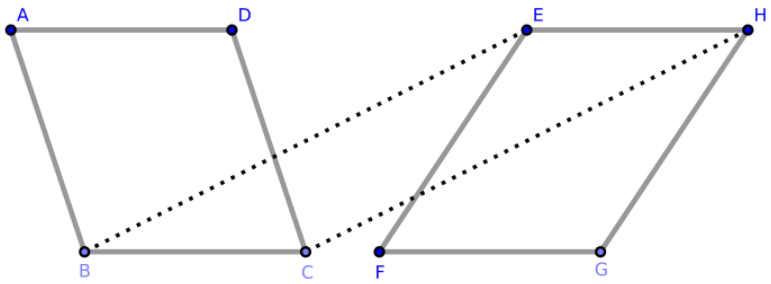
$$ADGB + \blacktriangle BGC = CGEF + \blacktriangle BGC$$

هذا يثبت حالة 3 ويكمل البرهان

القضية 1-36. مساحات متوازيات الأضلاع II.

متوازيات الأضلاع على القواعد المتساوية وبين نفس المتوازيين متساويان في المساحة.

الإثبات أنشئ ADCB▰ و EHGF▰ بين $\overleftrightarrow{AH} \parallel \overleftrightarrow{BG}$ على القاعدتين $\overline{BC}$ و $\overline{FG}$ بحيث إن $\overline{BC} = \overline{FG}$. ندعي أن EHGF▰ = ADCB▰ .



الشكل 1-5-13: [1-36]

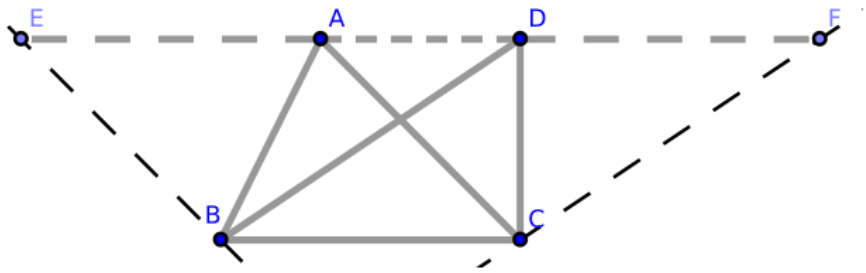
أنشئ $\overline{BE}$ و $\overline{CH}$. لأن EHGF متوازي أضلاع، $EH = FG$ [1-34]. لأن $BC = FG$ حسب الفرضية، $BC = EH$. عند معرفة هذه المعادلة و $\overline{EH} \parallel \overline{BC}$ ، حسب [1-33] $BE = CH$. يترتب على ذلك أن $\overline{BE} \parallel \overline{CH}$ و EHCB متوازي أضلاع.

حسب [1-35]، EHGF▰ = EHCB▰ و EHCB▰ = ADCB▰. لذلك، EHGF▰ = ADCB▰ ، وهذا يُكمل الإثبات.

القضية 1-37. مثلثات لها مساحات متساوية I.

المثلثات التي تقف على نفس القاعدة وبين نفس المتوازيان متساوية في المساحة.

الإثبات أنشئ ▲ ABC و ▲ DBC على القاعدة $\overline{BC}$ بشرط أن كل مثلث يقف بين المتوازيين $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{BC}$. ندعي أن ▲ DBC = ▲ ABC.



الشكل 1-5-14: [1-37]

أنشئ $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BE}$ و $\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{CF}$. يترتب على ذلك أن الشكلين AEBC و DBCF متوازيا أضلاع. حسب [1-35]، AEBC = DBCF .

لاحظ أن ▰AEBC = ▲ ABC لأن القطر AB يُنصف AEBC [1-34، # 1]. وبالمثل ▰DBCF = ▲ DBC ، ولذلك

$$\frac{1}{2} \blacktriangle ABC = \frac{1}{2} \blacktriangle DBC$$

$$\blacktriangle ABC = \blacktriangle DBC$$

تمارين

1- إذا كان وقف أي مثلثين متساويين في المساحة على نفس القاعدة، ولكن على جانبين مختلفين من القاعدة، فإن القاعدة أو امتدادها تنصف القطعة التي تصل بين رأسيهما. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- أنشئ مثلثًا مساويًا في المساحة لأي شكل رباعي.

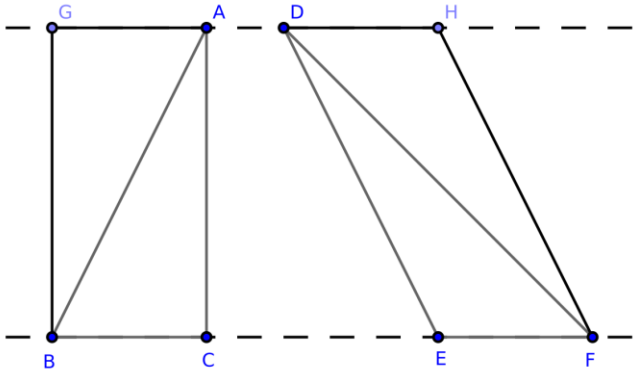
3- أنشئ مثلثًا مساويًا في المساحة لأي مضلع.

4- أنشئ معين مساوي في المساحة لأي متوازي أضلاع بحيث تكون قاعدته أحد أضلاع متوازي الأضلاع.

القضية 1-38. مثلثات لها مساحات متساوية II.

المثلثات التي تقف على قواعد متساوية وبين نفس المتوازيان متساوية في المساحة.

الإثبات أنشئ ▲ ABC و ▲ DEF بين $\overleftrightarrow{BF}$ و $\overleftrightarrow{AD}$ بشرط أن $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BF}$ و $BC = EF$. ندعي أن ▲ DEF = ▲ ABC.



شكل 1-5-15: [1-38]

حسب [1-31]، أنشئ $\overline{BG}$ حيث G هي نقطة على $\overleftrightarrow{AD}$ بشرط أن $\overline{BG} \parallel \overline{AC}$ ؛ على نحو مماثل، أنشئ $\overline{FH}$ حيث H هي نقطة على $\overleftrightarrow{AD}$ بشرط أن $\overline{DE} \parallel \overline{FH}$. يترتب على ذلك أن GACB و DHFE متوازيا أضلاع. لأن $BC = EF$، حسب [1-36] $GACB = DHFE$.

لأن $\overline{AB}$ يُنصف GACB و$\overline{DF}$ يُنصف DHFE حسب [1-34]، ▲ DEF = ▲ ABC، هذا يكمل الإثبات.

تمارين

1- كل متوسط في مثلث ينصف المثلث. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- إذا ساوى ضلعان في مثلث ضلعين في آخر، على التوالي، وكانت الزوايا الداخلية مكملة لبعضها البعض، فإن مساحتهما متساويتان.

3- إذا قُسمت قاعدة مثلث إلى أي عدد من القطع المتساوية، فإن القطع من الرأس إلى نقاط القسمة تقسم المثلث إلى العديد من الأجزاء المتساوية.

4- قطر متوازي الأضلاع والقطع من أي نقطة على القطر إلى الرأسين التي لا يمر خلالهما، تقسم متوازي الأضلاع إلى أربع مثلثات متساوية.

5- قطر الشكل الرباعي ينصف القطر الآخر إذا وفقط إذا كان ينصف الشكل الرباعي أيضًا. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

6- إذا كان ▲ ABC و ▲ ABD يقفان على القاعدة $\overline{AB}$ وبين نفس المتوازيان، وإذا التقى الموازي لـ $\overline{AB}$ مع الضلعين $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ عند النقطتين E و F ويلتقي الضلعين $\overline{AD}$ و $\overline{BD}$ عند النقطتين G، H، فإن $GH = EF$.

7- إذا كان لدينا بدلاً من المثلثات على نفس القاعدة مثلثات على قواعد متساوية وبين نفس المتوازيان، فإن الجزء المقطوع بواسطة أضلاع المثلثات على أي موازٍ للقواعد تكون متساوية في الطول.

8- إذا وُصلت نقطتي منتصف أي ضلعين من مثلث، فإن مساحة المثلث المكون من نصفي الضلعين له مساحة تساوي ربع الكل.

9- المثلث الذي رؤوسه نقاط منتصف أي ضلعين وأي نقطة في قاعدة أي مثلث آخر له مساحة تساوي ربع مساحة ذلك المثلث.

10- نَصّف أي مثلث بقطعة منشئة من نقطة معينة في أحد الأضلاع.

11- قسم أي مثلث ثلاثيًا بثلاث قطع منشئة من أي نقطة بداخله.

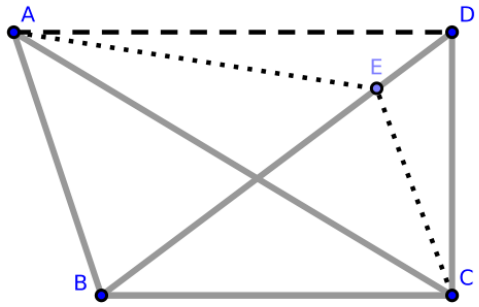
12- اثبت أن أي قطعة تمر خلال تقاطع قطري متوازي الأضلاع تنصف متوازي الأضلاع.

13- المثلث المكون من توصيل نقطة المنتصف لأحد الأضلاع غير المتوازية للشبه المنحرف بنهايتي الضلع المقابل في شبه المنحرف يساوي نصف مساحة شبه المنحرف.

القضية 1-39. مثلثات لها مساحات متساوية III.

المثلثات متساوية المساحة التي تقف على نفس القاعدة وعلى نفس الجانب من القاعدة تقف أيضًا بين نفس المتوازيين.

الإثبات افترض أن ▲BAC و ▲BDC يقفان على نفس القاعدة، $\overline{BC}$، وعلى نفس الجانب من $\overline{BC}$ ، وأن ▲BDC = ▲BAC؛ ندعي أن ▲BAC و ▲BDC يقفان بين $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.



الشكل 1-5-16: [1-39]

أنشئ $\overline{AD}$. من الواضح أن المثلثين يقفان بين $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$. نحتاج فقط إلى إثبات أن $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.

لنفترض أن $\overline{BC} \nparallel \overline{AD}$ وأن $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$ حيث E هي نقطة على $\overline{BD}$ غير D؛ أنشئ $\overline{EC}$. لاحظ أن ▲EDC > 0 (إذا ▲EDC = 0، فإن E = D، هذا تناقض).

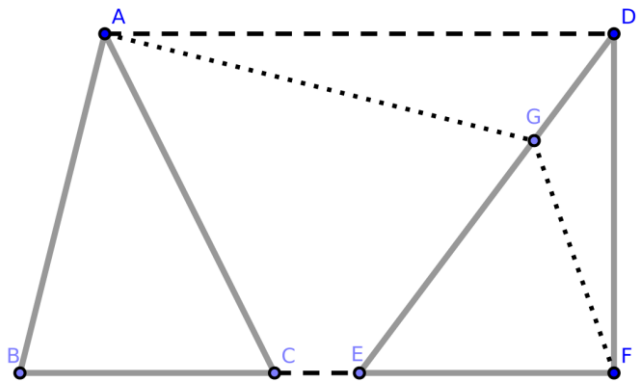
لأن المثلثين ▲BEC، ▲BAC يقفان على نفس القاعدة $\overline{BC}$ وبين نفس المتوازيين ($\overline{BC}$ و $\overline{AE}$)، نجد أن ▲BAC = ▲BEC [1-37]. حسب الفرضية، ▲BDC = ▲BAC. لذلك، ▲BDC = ▲BEC [موضوعة 1-1]. لكن ▲BDC = ▲BEC + ▲EDC، ولذلك ▲EDC = 0 و ▲EDC > 0. يحدث تناقض مشابه إذا وضعنا الحرف E في أي مكان بخلاف D.

يترتب على ذلك أن $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ، هذا يكمل الإثبات.

قضية 1-40. مثلثات لها مساحات متساوية IV

المثلثات المتساوية المساحة التي تقف على قواعد متساوية وعلى نفس الجانب من قواعدها، تقف بين نفس المتوازيان.

الإثبات أنشئ ABC ▲ و DEF ▲ على $\overline{BF}$ بشرط أن $EF = BC$ و $CE > 0$ و DEF ▲ = ABC ▲ وكل مثلث على نفس الجانب من القاعدة. أنشئ $\overline{AD}$. من الواضح أن ABC ▲ و DEF ▲ يقفان بين $\overline{AD}$ و $\overline{BF}$ ؛ ندعي أن $\overline{AD} \parallel \overline{BF}$.



شكل 1-5-17: [1-40]

إذا كان $\overline{AD} \nparallel \overline{BF}$ ، أنشئ $\overline{AG}$ (حيث G هي نقطة على $\overline{DE}$) بشرط أن $\overline{AG} \parallel \overline{BF}$. أنشئ أيضًا $\overline{FG}$. لاحظ أن DFG ▲ > 0.

فيما يخص المثلثين GEF ▲ و ABC ▲: إنهما يقفان على قاعدتين متساويتين ($\overline{BC}$، $\overline{EF}$) وبين نفس المتوازيين ($\overline{BF}$ ، $\overline{AG}$). حسب [1-38]، GEF ▲ = ABC ▲.

لكن DEF ▲ = ABC ▲ حسب الفرضية، ولذلك DEF ▲ = GEF ▲. لأن DGF ▲ + GEF ▲ = DEF ▲، DGF = 0 و DFG ▲ > 0. ينتج تناقض مشابه إذا وضعنا G في أي مكان بخلاف D.

يترتب على ذلك أن $\overline{AD} \parallel \overline{BF}$ ، هذا يكمل الإثبات.

تمارين

1- اثبت أن المثلثات ذات القواعد والارتفاعات المتساوية، تكون متساوية المساحة. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- القطعة التي تصل بين نقطتي منتصف ضلعي مثلث تكون موازية للقاعدة، وكل من المتوسطين من نهايتي القاعدة إلى نقطتي المنتصف ينصف المثلث. ولذلك، فإن المثلثين اللذين قاعدتهما الضلع الثالث في المثلث ورأسيهما نقطتي التنصيف متساويان في المساحة. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

3- الموازي لأي ضلع من أضلاع المثلث عبر نقطة المنتصف لآخر ينصف الثالث.

4- القطع التي تصل بين نقاط المنتصف لأضلاع المثلث تقسم المثلث إلى أربع مثلثات متطابقة. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

5- القطعة التي تصل بين نقطتي المنتصف لضلعي مثلث تساوي في الطول نصف الضلع الثالث.

6- نقاط المنتصف للأضلاع الأربعة للشكل الرباعي المحدب، بالترتيب، هي رؤوس متوازي أضلاع مساحته تساوي نصف مساحة الشكل الرباعي.

7- مجموع الضلعين المتوازيين لشبه المنحرف هو ضعف طول القطعة التي تربط بين نقطتي المنتصف للضلعين المتبقيين.

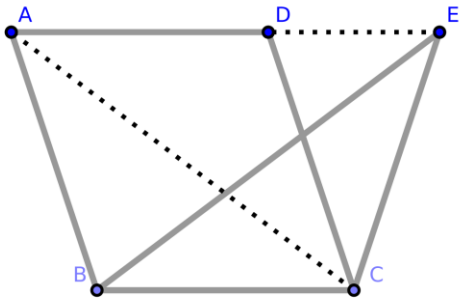
8- إن متوازي الأضلاع المكون من القطعة التي تصل بين نقطتي المنتصف لضلعي مثلث وأي قطعتين متوازيتين عبر نفس النقطتين لمقابلة الضلع الثالث، يساوي نصف مساحة المثلث.

9- القطعة التي تصل نقطتي منتصف ضلعين متقابلين لأي شكل رباعي والقطعة التي تصل نقطتي منتصف قطريه يتقاطعان.

قضية 1-41. متوازيات الأضلاع والمثلثات.

إذا وقف متوازي أضلاع ومثلث على نفس القاعدة وبين نفس المتوازيين، فإن متوازي الأضلاع ضعف مساحة المثلث.

الإثبات أنشئ ABCD▰ و EBC ▲ على القاعدة $\overline{BC}$ وبين $\overline{BC}$ ∥ $\overline{AE}$. ندعي أن ABCD▰ = 2 ⋅ EBC ▲.



شكل 1-5-18: [1-41]

أنشئ $\overline{AC}$ و $\overline{DE}$. حسب [1-34]، ABC ▲ ⋅ 2 = ABCD▰ ؛ حسب [1-37]، EBC ▲ = ABC ▲. لذلك، ABCD▰ = 2 ⋅ EBC ▲، هذا يكمل الإثبات.

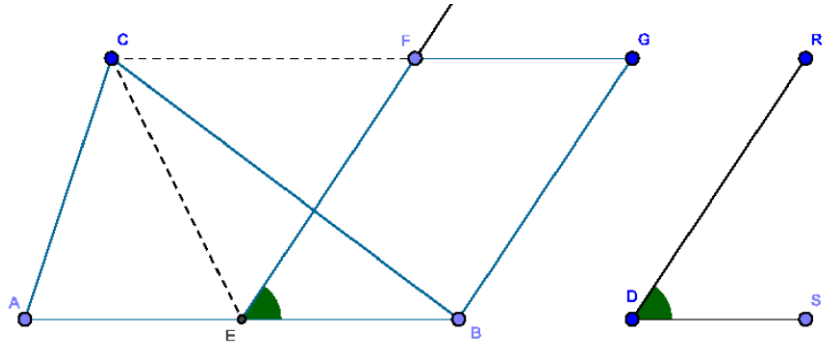
اللازمة 1-41-1. إذا كان لمثلث ومتوازي أضلاع ارتفاعات متساوية وإذا كانت قاعدة المثلث ضعف قاعدة متوازي الأضلاع، فإن مساحتيهما متساويتان.

اللازمة 1-41-2. لنفترض أن لدينا مثلثين بحيث إن قاعدتيهما ضلعان متقابلان لمتوازي أضلاع ورأسهما المشترك هو أي نقطة بين هذين الضلعين. فإن، مجموع مساحتي هذين المثلثين يساوي نصف مساحة متوازي الأضلاع.

قضية 1-42. إنشاء متوازيات الأضلاع I.

لأي مثلث وزاوية حادة، من الممكن إنشاء متوازي أضلاع يساوي مساحة المثلث ويحتوي على الزاوية.

الإثبات أنشئ ABC ▲ و RDS∠. نرغب في إنشاء FGBE▰ بشرط أن ABC ▲ = FGBE▰ و FGBE▰ يحتوي على زاوية مساوية لـ RDS∠.



شكل 1-5-19: [1-42]

نصف $\overline{AB}$ عند E، وأنشئ $\overline{EC}$. أنشئ BEF∠ = RDS∠ [1-23] و $\overline{AB} \parallel \overline{CG}$ و $\overline{EF} \parallel \overline{BG}$ [1-31].

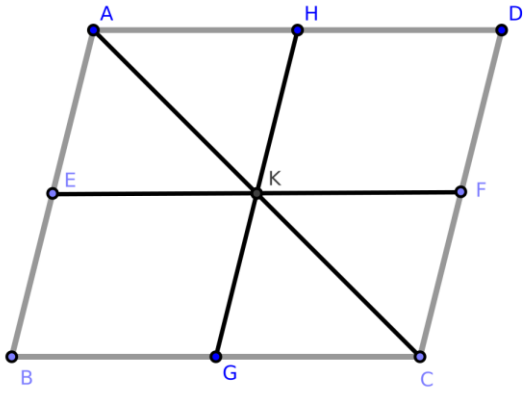
لأن AE = EB حسب الإنشاء، AEC ▲ = EBC ▲ حسب [1-38]. لذلك، EBC ▲ · 2 = ABC ▲. حسب [1-41]، EBC ▲ · 2 = FGBE▰. لذلك، ABC ▲ = FGBE▰.

لأن FGBE▰ يحتوي على BEF∠ حيث RDS∠ = BEF∠، هذا يكمل الإثبات

قضية 1-43. متممات متوازيات الأضلاع.

القطعتين الموازيتين عبر أي نقطة في أحد قطري متوازي الأضلاع تقسم متوازي الأضلاع إلى أربع متوازيات أضلاع أصغر: يُطلق على المتوازيين اللذين لا يمر عبرهما القطر متممين لمتوازيي الأضلاع الآخرين، وهذان المتممان متساويان في المساحة.

الإثبات. أنشئ ABCD ▰ والقطر $\overline{AC}$. لنفترض أن K أي نقطة على $\overline{AC}$ باستثناء A و C. أنشئ $\overline{GH}$ و $\overline{EF}$ عبر K بحيث $\overline{CD} \parallel \overline{GH}$ و $\overline{AD} \parallel \overline{EF}$. هذا يقسم ABCD▰ إلى أربع متوازيات أضلاع أصغر حيث EBGK▰، HKFD▰ متممان لـ AEKH▰، KGCF▰. ندعي أن HKFD ▰ = EBGK▰.



شكل 1-5-20: [1-43]

لأن $\overline{AC}$ يُنصف متوازي الأضلاع ABCD▰ و AEKH▰ و KGCF▰ حسب [1-34]، فإن ▲ ABC = ▲ ADC و ▲ AEK = ▲ AHK و ▲ KGC = ▲ KFC. لذلك،

$$\blacksquare EBGK = \blacktriangle ABC - \blacktriangle AEK - \blacktriangle KGC$$

$$= \blacktriangle ADC - \blacktriangle AHK - \blacktriangle KFC$$

$$= \blacksquare HKFD$$

هذا يُكمل الإثبات.

اللازمة 1-43-1. إذا أنشئنا قطعتين موازيتين (للأضلاع) خلال نقطة ما (K) داخل متوازي الأضلاع ABCD▰ إلى أضلاعه من أجل جعل HDFK▰ و EKGB▰ متساويان في المساحة، فإن K تقع على القطر $\overline{AC}$.

حسب [1-43]، نجد أن HDFK▰، EKGB▰ متساويان في المساحة إذا وفقط إذا كانت K نقطة على القطر $\overline{AC}$.

اللازمة 1-43-2.- ADFE ▰ = AHGB▰ و HDCG▰ = EFCB▰ .

تمارين

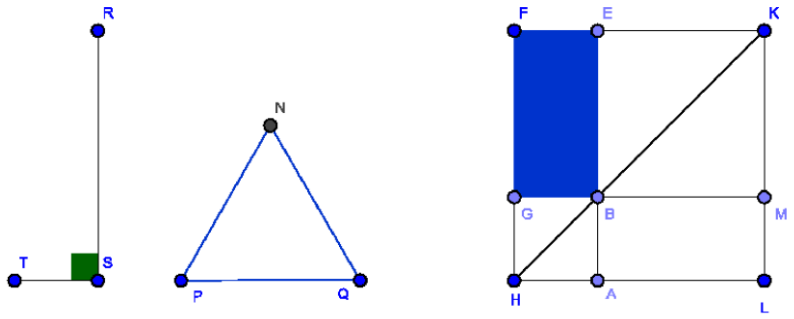
1- اثبت [1-43، اللازمة 1].

2- اثبت [1-43، اللازمة 2].

القضية 1-44. إنشاء متوازيات الأضلاع II.

لأي مثلث، وزاوية (حادة، أو قائمة، أو منفرجة)، وقطعة، يمكننا إنشاء متوازي أضلاع يساوي مساحة المثلث الذي يحتوي على الزاوية وله ضلع يساوي القطعة.

الإثبات أنشئ ∠RST و ▲NPQ و $\overline{AB}$. نرغب في إنشاء ▰BALM على $\overline{AB}$ بشرط أن ▲NPQ = ▰BALM و ▰BALM على زاوية تساوي ∠RST.



شكل 1-5-21: [1-44]

أنشئ متوازي الأضلاع ▰BEFG حيث ▲NPQ = ▰BEFG [1-42]، ∠RST = ∠GBE. و $\overline{AE} = \overline{AB} \oplus \overline{BE}$.
أنشئ أيضًا القطعة $\overline{BG} \parallel \overline{AH}$ [1-31]. مد $\overline{FG}$ لإنشاء $\overline{FH}$ ، وأنشئ $\overline{HB}$.

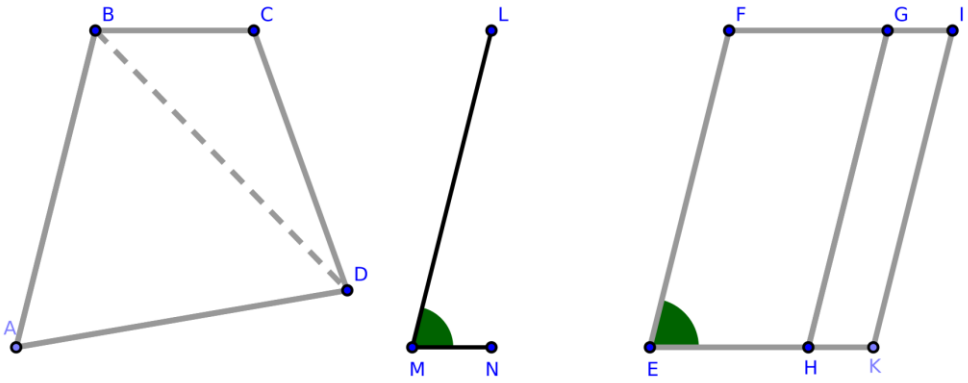
لأن $\overline{BG} \parallel \overline{AH}$ و $\overline{FE} \parallel \overline{BG}$ حسب الإنشاء، $\overline{AH} \parallel \overline{FE}$ حسب [1-30]. لاحظ أن $\overline{HF}$ يتقاطع مع $\overline{AH}$ و $\overline{FE}$ ؛ وبالتالي، زاويتان قائمتان = ∠HFE + ∠AHF. يترتب على ذلك أن زاويتان قائمتان < ∠GFE + BHG. حسب [1-3-3، موضوعة 4]، إذا مددنا $\overline{HB}$ و $\overline{FE}$ ، فسوف يتقاطعان عند نقطة ما K. عبر K، أنشئ $\overline{AB} \parallel \overline{KL}$ [1-31]، مد $\overline{AH}$ ليتقاطع مع $\overline{KL}$ عند L، ومد $\overline{GB}$ ليتقاطع مع $\overline{KL}$ في M. ندعي أن ▰BALM يفي الشروط المطلوبة.

من الواضح أن BALM مبني على AB. حسب [1-43]، BMLA = FEBG، و ▲NPQ = FEBG حسب الإنشاء؛ لذلك ▲NPQ = ▰BALM. حسب [1-15]، ∠EBG = ∠ABM و ∠EBG = ∠RST حسب الإنشاء؛ وبالتالي، ∠ABM = ∠RST. هذا يكمل الإثبات

قضية 1-45. إنشاء متوازيات الأضلاع III.

لأي زاوية (حادة، أو قائمة، أو منفرجة) وأي مضلع، يمكننا إنشاء متوازي أضلاع يساوي مساحة المضلع ويحتوي على زاوية مساوية للزاوية.

الإثبات أنشئ المضلع ABCD و ∠LMN. نرغب في إنشاء ▰FIKE بشرط أن يحتوي على زاوية تساوي ∠LMN و ▰FIKE = ABCD.



شكل 1-5-22: [1-45]

حسب [1-42]. نبني $\overline{BD}$ و▰FGHE بشرط أن ▰FGHE = ▲ ABD حيث ∠FEH = ∠LMN.

على $\overline{GH}$ ، أنشئ ▰GIKH بشرط أن ▰GIKH = ▲ BCD حيث ∠GHK = ∠LMN [1-44]. (قد نواصل استخدام هذه الخوارزمية لأي مثلثات إضافية متبقية في ABCD. هذا يسمح لنا أن ندعي أن الإثبات التالي ينطبق على أي مضلع له n أضلاع حيث $n < \infty$.) عند الانتهاء من هذه الخوارزمية، ندعي أن ▰FEKI يفي بالشروط المطلوبة.

لأن∠FEH = ∠LMN = ∠ GHK حسب الإنشاء و ∠FEH = ∠GHK. يترتب على ذلك أن

$$\angle GHk + \angle GHE = \angle FEH + \angle GHE$$

بما أن $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$ و $\overline{EH}$ يتقاطع معهما، فإن زاويتان قائمتان ∠FEH + ∠GHE = [1-29]. لذلك زاويتان قائمتان ∠GHK + ∠GHE = ، ولذلك $\overline{EH} \oplus \overline{HK} = \overline{EK}$ [1-14، اللازمة 1]. لأن $\overline{EH} \parallel \overline{FG}$ حسب الإنشاء، فإن $\overline{EK} \parallel \overline{FG}$.

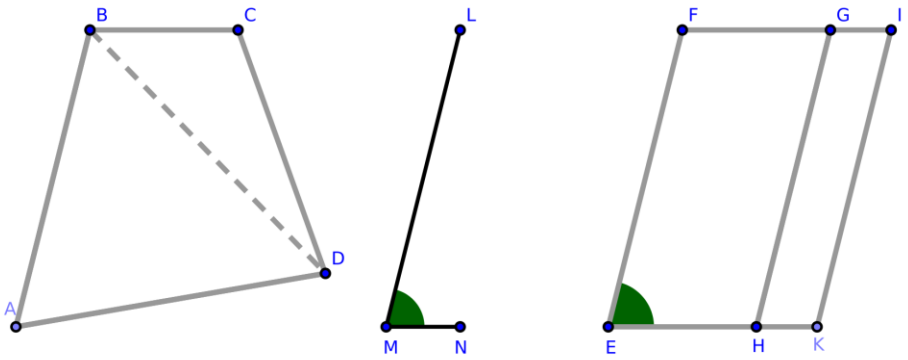
على غرار ما سبق، لأن $\overline{GH}$ يتقاطع مع المتوازيين $\overline{FG}$ و $\overline{EK}$ ، ∠FGH = ∠GHK [اللازمة 1-29-1] ولذلك

$$\angle FGH + \angle HGI = \angle GHK + \angle HGI$$

بما أن $\overline{HK} \parallel \overline{GI}$ و $\overline{GH}$ يتقاطع معهما، فإن زاويتان قائمتان ∠GHK = ∠HGI = [1-29]. لذلك، زاويتان قائمتان ∠FGH = ∠HGI و $\overline{FG} \oplus \overline{GI} = \overline{FI}$.

لأن ▰FEHG و ▰GHKI متوازيا أضلاع، فإن $\overline{EF}$ و $\overline{KI}$ متوازيان مع $\overline{GH}$ ؛ حسب [1-30]، $\overline{EF} \parallel \overline{KI}$. بما أنّ ∠FGH = ∠GHK مما ورد أعلاه، حسب [اللازمة 1-29-1]، $\overline{EK} \parallel \overline{FI}$. لذلك، FIKE متوازي أضلاع.

بما أنّ ∠FEK = ∠LMN، FIKE يحتوي على زاوية تساوي ∠LMN.



شكل 1-5-23: [1-45]

لأن ▲ ABD = ▰FGHE حسب الإنشاء و ▲ BCD = ▰GIKH ،

ABCD =▲ ABD ⊕▲ BCD

= ▰FGHE ⊕ ▰GIKH

= ▰FIKE

هذا يكمل الإثبات

تمارين

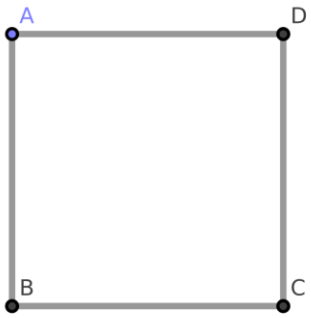
1- أنشئ مستطيلًا يساوي مجموع n ، ... ،3،2 من المضلعات.

2- أنشئ مستطيلاً يساوي الفرق بين مساحتي أي شكلين.

قضية 1-46. إنشاء مربع I.

على أي قطعة، يمكن إنشاء مربع.

الإثبات أنشئ $\overline{AB}$ ؛ نرغب في إنشاء مربع على $\overline{AB}$.



شكل 1-5-24: [1-46]

أنشئ $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ [11-1] حيث $AB = AD$ [3-1]. عبر D، أنشئ $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ [31-1] حيث $AB = CD$، وعبر B أنشئ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. ندعي أن ABCD هو المربع المطلوب.

حسب الإنشاء،

$$AD = AB = CD$$

لأن ABCD متوازي أضلاع، $AD = BC$ [34-1]؛ فإن الأضلاع الأربعة لـ ABCD متساوية. ويترتب على ذلك أن ABCD معين و$\angle DAB$ قائمة. حسب [تعريف 1-30]، ABCD مربع.

ملحوظة [1-46] توطئة لـ [1-47]. تُقدم [2-14] طريقة أخرى لإنشاء مربع.

تمارين

1- أثبت أن أضلاع أي مربعين لهم نفس الطول إذا وفقط إذا كان المربعان متساويين في المساحة. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- اثبت أن متوازيات الأضلاع حول قطر المربع هي مربعات.

3- إذا أخذنا نقاط متساوية البعد عن الزوايا الأربع على الأضلاع الأربعة لمربع (أو على امتدادها)، فستُكون رؤوس مربع آخر (وبالمثل للخماسي المنتظم، السداسي، إلخ..).

4- قسّم أي مربع إلى خمسة أجزاء متساوية: على وجه التحديد، أربع مثلثات قائمة ومربع.

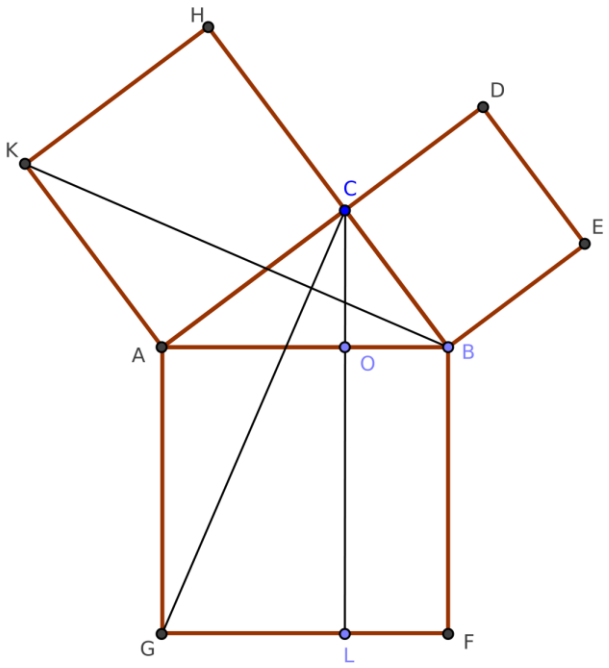
5- أثبت أن صيغة مساحة المستطيل هي $A = bh$.

القضية 1-47. مبرهنة فيثاغورث (الملقبة بـ مبرهنة جوجو).

في أي مثلث قائم، يكون المربع على الضلع المقابل للزاوية القائمة (الوتر) مساويًا لمجموع مساحتي المربعين على الضلعين الآخرين.

الإثبات أنشئ مثلث قائم الزاوية ABC ▲ حيث $\overline{AB}$ هو الوتر. ندعي أن:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$



شكل 1-5-25: [1-47]

حسب [1-46]، يمكننا إنشاء مربعات على الأضلاع AB و BC و CA لـ ABC ▲ كما في الشكل 1-5-25. أنشئ $\overline{CL} \parallel \overline{AG}$ حيث L نقطة على $\overline{GF}$. أيضًا أنشئ $\overline{CG}$ و $\overline{BK}$. لأن ∠ACB و∠ACH قائمتان حسب الإنشاء، المجموع ∠ACH + ∠ABD يساوي، أيضًا، زاويتين قائمتين. لذلك $\overline{BH} = \overline{BC} \oplus \overline{CH}$ [1-14]. وبالمثل، $\overline{AD} = \overline{CD} \oplus \overline{AC}$.

لأن ∠BAG و ∠CAK زاويتان داخل مربع، فهما قائمتان. لذلك

$$\angle BAC = \angle CAK$$

$$\angle BAG + \angle BAC = \angle CAK + \angle BAC$$

$$\angle CAG = \angle KAB$$

لأن BAGF و CHKA مربعان، فإن $AG = BA$ و $AK = CA$. فيما يخص▲ CAG و ▲ KAB: لأن $AK = CA$ و $AG = BA$ و ∠CAG = ∠KAB ، حسب [1-4] ▲ KAB ≅ ▲ CAG.

حسب [1-41]، $\text{AGLO} = 2 \cdot \blacktriangle \text{CAG}$. لأنهما يقفان على $\overline{\text{AG}}$ ويقفان بين المتوازيين $\overline{\text{AG}}$ و $\overline{\text{CL}}$. وبالمثل، $\text{CHKA} = 2 \cdot \blacktriangle \text{KAB}$ لأنهما يقفان على $\overline{\text{AK}}$ وبين $\overline{\text{AK}}$ و $\overline{\text{BH}}$. لأن $\blacktriangle \text{KAB} \cong \blacktriangle \text{CAG}$، $\text{AGLO} = \text{KACH}$.

وبالمثل، يمكن إظهار أن $\text{OLFB} = \text{DCBE}$. لذلك،

$$\begin{aligned} \text{AB}^2 &= \text{AGFB} \\ &= \text{AGLO} \oplus \text{OLFB} \\ &= \text{KACH} + \text{DCBE} \\ &= \text{AC}^2 + \text{BC}^2 \end{aligned}$$

هذا يثبت ادعاءنا.

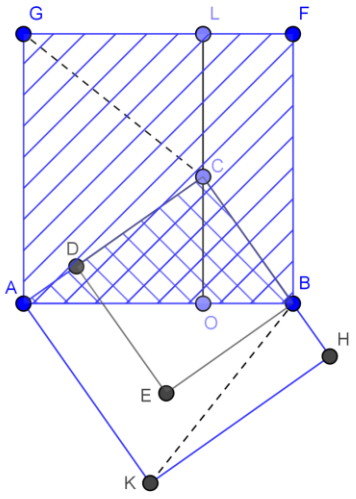
ملحوظة [1-47] هي حالة خاصة من [1-6].

ملاحظة 1-48. [**اللازمة** 10-28-1] تصف النسبة التي تُعطي الثلاثيات الفيثاغورسية (ثلاثة أعداد صحيحة موجبة a ، b ، c بشرط أن $\text{a}^2 + \text{b}^2 = \text{c}^2$): إذا كان a و b عددين صحيحين موجبين و $\text{b} < \text{a}$ ، فإن الثلاثيات الفيثاغورسية لها النسبة

$$\text{ab}: \frac{\text{a}^2 - \text{b}^2}{2} : \frac{\text{a}^2 + \text{b}^2}{2}$$

إثبات بديل:

الإثبات أنشئ المربعات كما في الشكل 1-5-26 بشرط أن يكون $\blacktriangle \text{ACB}$ قائم الزاوية و $\angle\text{ACB}$ هي الزاوية القائمة.



الشكل 1-5-26: [1-47]، إثبات بديل

أنشئ $\overline{CG}$ و $\overline{BK}$ ؛ عبر C أنشئ $\overline{OL} \parallel \overline{AG}$. لاحظ أن $\angle GAK = \angle GAC + \angle BAC + \angle BAK$ ، $\angle CAK$ و $\angle BAG$ زاويتان قائمتان. نستنتج من ذلك أن

$$\angle BAG = \angle CAK$$

$$\angle BAG - \angle BAC = \angle CAK - \angle BAC$$

$$\angle CAG = \angle BAK$$

فيما يخص ▲ CAG و ▲ BAK: $AK = CA$ و $AB = AG$ ، و $\angle CAG = BAK$. حسب [1-4]، ▲ $CAG \cong$ ▲ BAK.

حسب [1-41]، نجد أن $AKHC = GAOL$. وبالمثل، $DEBC = LOBF$.

ملحوظة الإثبات البديل أقصر لأنه ليس من الضروري إثبات أن $\overline{AC}$ و $\overline{CD}$ يشكلان قطعة واحدة. وبالمثل، يمكن إثبات القضية بأخذ أي من الأشكال الثمانية المتكونة عن طريق قلب المربعات في جميع الاتجاهات الممكنة. يمكن الحصول على تبسيط آخر للإثبات عن طريق الأخذ في الاعتبار أن النقطة A هي نقطة حيث يمكن تدوير أحد المثلثين ▲ CAG أو ▲ BAK في مستواه حتى يتطابق مع الآخر؛ ومن ثم فهما متطابقان.

تمارين

1- أثبت أن المربع الموجود على $\overline{AC}$ يساوي مساحة المستطيل $AO \cdot AB$ والمربع على $BO \cdot AB = BC$. (ملاحظة: يشير $AO \cdot AB$ إلى المستطيل المكون من القطعتين $\overline{AB}$ و$\overline{AO}$.)

2- اثبت أن المربع الموجود على $CO = AO \cdot OB$.

3- اثبت أن $AC^2 - BC^2 = AO^2 - BO^2$

4- جد القطعة التي مربعها يساوي مجموع مساحتي أي مربعين. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

5- لأي قاعدة مثلث والفرق بين مربعي ضلعيه، المحل الهندسي لرأسه هو قطعة عمودية مع قاعدته.

6- اثبت أن $\overline{BK} \perp \overline{CG}$. $\overline{BK}$ و $\overline{CG}$ عبارة عن قطعتين قاطعتين.

7- إذا أُنشئت $\overline{EG}$، فإن $EG^2 = AC^2 + 4 \cdot BC^2$.

8- يزيد المربع المُنشئ على مجموع أضلاع مثلث قائم عن المربع على الوتر بأربعة أضعاف مساحة المثلث (انظر [1-46، # 3]). بشكل عام، إذا كانت الزاوية الرأسية للمثلث مساوية لزاوية المضلع المنتظم الذي له عدد n من الأضلاع، فإن المضلع المنتظم الذي له عدد n من الأضلاع، المُنشئ على قطعة تساوي مجموع أضلاع المثلث يتجاوز مساحة المضلع المنتظم الذي له عدد n من الأضلاع المبني على القاعدة بمقدار n مضروب في مساحة المثلث.

9- إذا تقاطع $\overline{AC}$ و $\overline{BK}$ عند P وأنشئت قطعة عبر P موازية لـ $\overline{BC}$ ، لتقابل $\overline{AB}$ عند Q، فإن $PQ = CP$.

10- اثبت أن كل من المثلثين ▲ AGK و ▲ BEF في [1-47] يساوي مساحة ▲ ABC. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

11- أوجد قطعة مربعها يساوي الفرق بين مربعين على قطعتين.

12- المربع على الفرق بين الضلعين $\overline{AC}$ و $\overline{CB}$ أقل من مربع الوتر بأربعة أضعاف مساحة المثلث.

13- إذا وُصلت $\overline{AE}$ ، فإن القطع $\overline{AE}$ و $\overline{BK}$ و $\overline{CL}$ تتقاطع.

14- في المثلث المتساوي الأضلاع، ثلاثة أضعاف المربع على أي ضلع يساوي أربعة أضعاف المربع على العمودي عليه من الرأس المقابل.

15- نبني المربع BEFG على $\overline{BE}$ ، وهو جزء من الضلع $\overline{BC}$ من المربع ABCD، بحيث ضلعه $\overline{BG}$ امتداد $\overline{AB}$. قسّم الشكل AGFECD إلى ثلاثة أجزاء تشكل مربعًا.

16- أربعة أضعاف مجموع المربعات على المتوسطات التي تُنصف أضلاع مثلث قائم الزاوية تساوي خمسة أضعاف مربع الوتر.

17- إذا أنشئنا أعمدة على أضلاع المضلع من أي نقطة وقمنا بتقسيم كل ضلع إلى قطعتين، فإن مجموع المربعات على مجموعة من القطع المتبادلة يساوي مجموع المربعات على المجموعة المتبقية.

18- مجموع المربعين على القطعتين المنشأتين من أي نقطة إلى زاويتين متقابلتين في مستطيل يساوي مجموع المربعين على القطعتين من نفس النقطة إلى الزاويتين الأخريين.

19- قسّم وتر المثلث القائم الزاوية إلى جزأين بشرط أن يكون الفرق بين مربعيهما يساوي المربع الموجود على أحد أضلاعه.

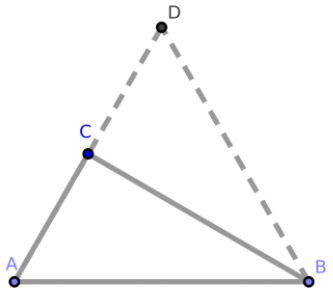
القضية 1-48. مقلوب مبرهنة فيثاغورث / جوجو.

أنشئ مربعات على جميع أضلاع مثلث. إذا كان المربع الموجود على الوتر مساويًا في المساحة لمجموع مساحتي المربعين على الضلعين الآخرين، فإن الزاوية المقابلة للضلع الأطول قائمة.

الإثبات أنشئ ABC ▲ بشرط أن $\overline{AB}$ هو أطول ضلع و

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

ندعي أن: ∠ACB زاوية قائمة.



شكل 1-5-27: [1-48]

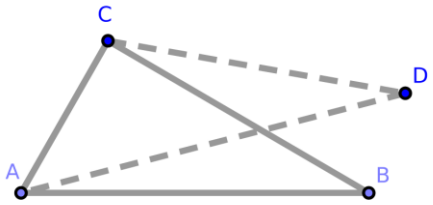
أنشئ $\overline{CD}$ بحيث $CA = CD$ [1-3] و $\overline{CB} \perp \overline{CD}$ [1-11]. أنشئ $\overline{BD}$ ، وفيما يخص ▲BCD:∠BCD هي زاوية قائمة حسب الإنشاء. $AC = CD$ تقتضي أن $AC^2 = CD^2$، وهكذا

$$AC^2 + CB^2 = CD^2 + CB^2$$

حسب [1-47] $BD^2 = CD^2 + CB^2$ ؛ حسب الفرضية، $AB^2 = AC^2 + CB^2$. ومن ثم $AB^2 = BD^2$ ؛ يتبع ذلك أن $AB = BD$ [1-46، # 1].

فيما يخص ▲ACB و ▲DCB: $AB = DB$، $CD = AC$ حسب الإنشاء، ويشتركان في الضلع CD. حسب [1-8]، ▲DCB ≅ ▲ACB ولذلك ∠DCB = ∠ACB بما أنّ ∠DCB زاوية قائمة حسب الإنشاء، فإن ∠ACB هي زاوية قائمة.

إثبات بديل بالتناقض:



الشكل 1-5-28: [1-48]، إثبات بديل

الإثبات أنشئ ABC ▲ بشرط أن $AB^2 = BC^2 + AC^2$. إذا كان $\overline{CB}$ غير عمودي على $\overline{CA}$، أنشئ $\overline{CD} \perp \overline{CA}$ بحيث إن $CB = CD$. أنشئ $\overline{AD}$.

فيما يخص ABC ▲ و ADC ▲: $CD = CB$، والمثلثان يشتركان في الضلع $\overline{AC}$ ، وكما في الإثبات أعلاه، يمكن إظهار أن $AD = AB$. هذا يتعارض مع [1-7]. بناءًا على هذا، ∠ACB هي زاوية قائمة

اللازمة 1-48-1 لنفترض أن a و b و c أضلاع A ▲ حيث c هو أطول ضلع. A ▲ مثلث قائم الزاوية إذا وفقط إذا كان $a^2 + b^2 = c^2$.

أسئلة الامتحان على الفصل الأول.

1- ما هي الهندسة الرياضية؟

2- ما هو الكائن الهندسي؟

3- اذكر المفاهيم الأساسية للهندسة الرياضية. (الإجابة: النقاط، والخطوط، والأسطح والمجسمات.)

4- ما هي أنواع الخطوط في الهندسة؟ (الإجابة: مستقيم ومنحني.)

5- كيف يُنشئ الخط المستقيم؟ (الإجابة: عن طريق توصيل أي نقطتين.)

6- كيف يُنشئ الخط المنحني؟ (الإجابة: عن طريق توصيل أي ثلاث نقاط ليست متسامتة.)

7- ما هي أنواع الأسطح؟ (الإجابة مستوية ومنحنية.)

8- كيف يُنشئ سطح مستوي؟

9- لماذا لا يوجد أبعاد للنقطة؟

10- هل للخط عرض أو سمك؟

11- كم عدد أبعاد السطح؟

12- ما هي الهندسة المستوية؟

13- أي جزء من الهندسة المستوية هو موضوع هذا الفصل؟

14- ما هو موضوع الفصول المتبقية؟

15- كيف تُثبت قضية عن طريق الإثبات غير المباشر؟

16- ما المقصود بمقلوب قضية؟

17- ما القضية التي هي مثال على قاعدة التماثل؟

18- ما هي الأشكال المتطابقة؟

19- ما هي الطريقة الأخرى لوصف الأشكال المتطابقة؟ (الإجابة: هم متساوون من جميع النواحي.)

20. اذكر جميع حالات التساوي التي ليست تطابق في الفصل 1.

21- ما الفرق بين الرمز الذي يدل على التطابق والذي يدل على التساوي؟

22- عرف الزاويتين المتجاورتين، والخارجيتين والداخليتين والمتبادلتين.

23- ما المقصود بإسقاط خط على آخر؟

24- ما المقصود بمتوسطات المثلث؟

25- ما المقصود بالقطر الثالث للشكل الرباعي؟

26- اذكر بعض القضايا الواردة في الفصل 1 التي تمثل حالات خاصة لحالات أخري أعم.

27- ماذا يساوي مجموع الزوايا الخارجية لأي مضلع؟

28- كم عدد الشروط اللازمة لإنشاء مثلث؟ (الإجابة: ثلاثة؛ مثل الأضلاع الثلاثة، أو ضلعين وزاوية، إلخ.)

تمارين الفصل 1.

1- افترض أن $\blacktriangle_1$ و $\blacktriangle_2$ مثلثين بحيث:

(أ) يُنشئ $\blacktriangle_1$ في $\blacktriangle_2$

(ب) يمر كل ضلع من أضلاع $\blacktriangle_2$ عبر رأس لـ $\blacktriangle_1$

(ج) كل ضلع من $\blacktriangle_2$ يوازي الضلع المناظر في $\blacktriangle_1$

ندعي أن $\blacktriangle_2 = 4 \cdot \blacktriangle_1$ [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- الارتفاعات الثلاثة للمثلث الأول في # 1 هي الارتفاعات عند نقاط منتصف أضلاع المثلث الثاني.

3- عبر أي نقطة، أنشئ خط بشرط أن يُنصف الجزء المقطوع بواسطة قطعتي أي زاوية عند النقطة.

4- المتوسطات الثلاثة للمثلث تتقاطع. (ملاحظة: هذا إثبات لوجود **مركز كتلة المثلث**. يفضل استخدام مبرهنة سيفا Ceva's Theorem، غير الموجودة في إقليدس، لحل هذه المسألة. يجب على الطلاب الذين يسعون إلى التحدي محاولة حل هذه المسألة دون استخدام مبرهنة سيفا.)

5- أنشئ المثلث إذا علمت ضلعين ومتوسط الضلع الثالث.

6- افترض أن P محيط المثلث و S مجموع أطوال متوسطات المثلث. أثبت أن $\frac{3}{4} P < S < P$.

7- أنشئ المثلث إذا علمت أحد أضلاعه ومتوسطي الضلعين الآخرين.

8- أنشئ المثلث إذا علمت المتوسطات الثلاثة. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

9- الزاوية المحصورة بين العمود من الزاوية الرأسية لمثلث على القاعدة ومنصف الزاوية الرأسية تساوي نصف الفرق بين زاويتي القاعدة.

10- أوجد في متوازيين نقطتين متساويتي البعد عن أي نقطة بحيث القطعة الواصلة بينهما توازي خط معين.

11- أنشئ متوازي الأضلاع إذا علمت القطرين وضلع.

12- اثبت أن أقصر متوسط في المثلث يقابل الضلع الأكبر.

13- أوجد في متوازيين نقطتين تقفان مقابل زاوية قائمة عند نقطة معينة ومتساويي البعد عنها.

14- مجموع بعدي أي نقطة في قاعدة مثلث متساوي الساقين عن الساقين يساوي البعد بين أي من نهايتي القاعدة عن الضلع المقابل.

15- اثبت أن الأعمدة الثلاثة عند نقاط المنتصف لأضلاع المثلث تتقاطع.

16- ادرج شبيه لمعين في مثلث بحيث يكون له زاوية من زوايا المثلث. [انظر الفصل الأخير للتوصل إلى حل.]

17- ادرج مربعًا في مثلث بحيث تكون قاعدته على أحد أضلاع المثلث.

18- أوجد المحل الهندسي للنقطة التي مجموع أو فرق بعدها عن خطين ثابتين يساوي أي طول.

19- مجموع الأعمدة من أي نقطة داخل مثلث متساوي الأضلاع يساوي العمود من أي رأس على الضلع المقابل.

20. جد نقطة في أحد أضلاع مثلث بشرط أن يكون مجموع الجزئين المقطوعين بواسطة الضلعين الآخرين على المتوازيين المنشئين من نفس النقطة إلى هذين الضلعين مساويًا لأي طول.

21- إذا وازت قطعتا زاوية، على التوالي، قطعتي زاوية أخرى، فإن منصفيهما إما متوازيان أو متعامدان.

22- ادرج في أي مثلث متوازي أضلاع بحيث يتقاطع قطراه عند أي نقطة.

23- أنشئ شكل رباعي إذا علمت الأضلاع الأربعة وموضع نقطتي المنتصف لضلعين متقابلين.

24- إذا علمت قواعد مثلثين أو أكثر مشتركين في رأس، من حيث المقدار والموضع، ومجموع المساحات. اثبت أن المحل الهندسي للرأس هو خط مستقيم.

25- إذا علمت مجموع الأعمدة من أي نقطة على أضلاع أي مضلع، فإن المحل الهندسي للنقطة هو خط مستقيم.

26- إذا كان ABC ▲ مثلث متساوي الساقين وكانت ساقاه AB، AC وإذا كان $B'C'$ أي قاطع يقطع الضلعين المتساويين عند B' و C' ، بشرط أن $AB' + AC' = AB + AC$ ، اثبت أن $B'C' > BC$.

27- لأي نقطتين A و B، وأي نقطة P على أي خط L، فأثبت أن الفرق بين AP و PB هو الأقصى عندما ينصف L الزاوية $\angle APB$. وضح أن مجموعهما هو الأدنى إذا كان ينصف المكملة.

28- نصف شكل رباعي بقطعة منشأة من أحد رؤوسه.

29- إذا كان $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ خطين متوازيين مقطوعين بشكل مائل بواسطة $\overleftrightarrow{AB}$ وعموديًا بواسطة $\overline{AC}$ ، وبين هذه الخطوط نقوم بإنشاء BED، الذي يقطع $\overleftrightarrow{AC}$ عند النقطة E بحيث $ED = 2 \cdot AB$، اثبت أن $\angle DBC = \frac{1}{3} \angle ABC$.

30. إذا كانت O هي نقطة التقاء منصفات زوايا ABC ▲، وإذا مدت $\overline{AO}$ لتتقاطع مع $\overline{BC}$ عند D، وإذا أنشئت $\overline{OE}$ من O بشرط أن يكون $\overline{OE} \perp \overline{BC}$ ، اثبت أن $\angle COE = \angle BOD$.

31- الزاوية التي يصنعها منصفا زاويتين متتاليتين في شكل رباعي محدب تساوي نصف مجموع الزاويتين الأخريين؛ الزاوية التي يصنعها منصفا زاويتين متقابلتين تساوي نصف الفرق بين الزاويتين الأخريين.

32- إذا وصلنا في الإنشاء في [47-1] $\overline{EF}$ و $\overline{KG}$ ، فإن $EF^2 + KG^2 = 5 \cdot AB^2$.

33- إذا علمت نقاط المنتصف لأضلاع مضلع محدب له عدد فردي من الأضلاع، فأنشئ المضلع.

34- قسم شكل رباعي ثلاثيًا بواسطة خطوط منشأة من إحدى زواياه.

35- إذا علمت قاعدة المثلث من حيث المقدار والموضع ومجموع الأضلاع، فأثبت أن العمودي من أي من نهايتي القاعدة على الضلع المجاور والمنصف الخارجي للزاوية الرأسية يلتقيان، في نقطة، على خط عمودي على القاعدة.

36- إن منصفات زوايا الشكل الرباعي المحدب تُشكل رباعي الأضلاع فيه كل زاويتان متقابلتان مكملتان لبعضهما البعض. إذا كان الشكل الرباعي الأول متوازي أضلاع، فإن الثاني مستطيل؛ إذا كان الأول مستطيلاً، فإن الثاني مربع.

37- افترض أن نقاط المنتصف للأضلاع AB و BC و CA للمثلث هي على التوالي D و E و F وأن $\overline{DG} \parallel \overline{BF}$ وتتقاطع مع $\overline{EF}$. اثبت أن أضلاع المثلث DCG ▲ تساوي على التوالي متوسطات المثلث ABC ▲ الثلاثة.

38- أوجد مسار كرة البلياردو بدايةً من نقطة معينة وبعد أن تنعكس من الأضلاع الأربعة للطاولة ومرورها عبر نقطة أخرى معينة. (افترض أن الكرة لا تدخل أي جيب).

39- إذا تساوت القطعتان اللذان ينصفان زاويتين من المثلث وينتهيان عند الضلعين المقابلين، فأثبت أن المثلث متساوي الساقين.

40. إذا أُدرج مربع في مثلث، فإن المستطيل المحصور بضلعه ومجموع القاعدة والارتفاع يساوي ضعف مساحة المثلث.

41- إذا كانت AB و AC هما الساقان في مثلث متساوي الساقين وإذا كانت $\overline{BD} \perp \overline{AC}$، فأثبت أن $BC^2 = 2\ AC.\ CD$.

42- إذا علمت قاعدة المثلث، والفرق بين زاويتي القاعدة، والمجموع أو الفرق بين الأضلاع، فأنشئ المثلث.

43- إذا علمت قاعدة المثلث، والمتوسط الذي ينصف القاعدة، والمساحة، فأنشئ المثلث.

44- إذا تقاطعا القطرين AC و BD للشكل الرباعي ABCD عند E ونُصفا عند النقطتين F و G، فإن

$$4 \cdot \blacktriangle EFG = (AEB + ECD) - (AED + EBC)$$

45- إذا أُنْشِئَت مربعات على أضلاع أي مثلث، فإن خطوط الواصلة بين الزوايا المتجاورة تكون على التوالي:

(أ) أضعاف متوسطات المثلث؛

(ب) عمودية عليها.

الفصل 3

الدوائر

ستُفترض الموضوعات والخصائص الرياضية من الفصلين 1 و2 ولن يُستشهد بها عمومًا. هذه قاعدة سنطبقها على الفصول اللاحقة، مع مراعاة ما يقتضيه اختلاف الحال.

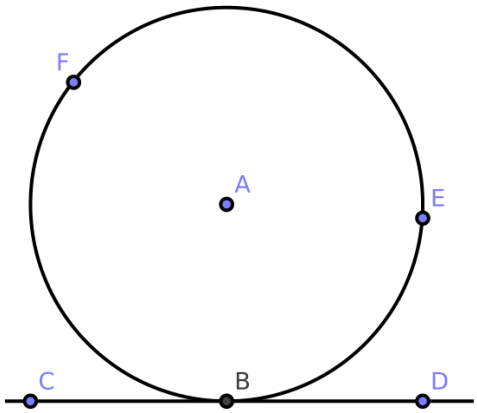
ملحوظة. لم تعد الهندسة الحديثة تستخدم تعريفات إقليدس للمنحنيات والمماسات وما إلى ذلك. ومع ذلك، هذه التعريفات تكفي غرضنا من هذا الكتاب.

3-1 التعريفات

1- الدوائر المتساوية هي التي لها أنصاف أقطار متساوية.

2- **وتر الدائرة** هو قطعة تتقاطع مع محيط الدائرة في نقطتين. إذا مُد الوتر لإنشاء خط، فإن هذا الخط يسمى **قاطع**، ويسمى كل جزء من جزأي المحيط الناتجين من تقسيم القاطع لمحيط الدائرة **بالقوس** - يسمى الأكبر **بالقوس المترافق الأكبر**، ويسمى الأصغر **بالقوس المترافق الأصغر**.

3- يُقال إن قطعة أو شعاع أو خط مستقيم يمس دائرة عندما يتقاطع مع محيط الدائرة عند نقطة فقط. يُطلق على القطعة أو الشعاع أو الخط المستقيم **مماس الدائرة**، وتسمى النقطة التي يمس فيها المحيط **بنقطة التقاطع**.



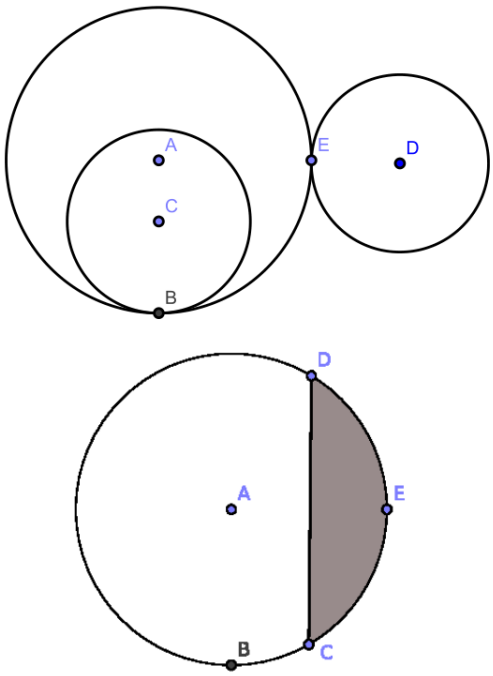
الشكل 3-1-1: [تعريف 3-3] $\overleftrightarrow{CD}$ يمس A● عند B ؛ أو $\overleftrightarrow{CD}$ مماس لـ A● و B هي نقطة التقاطع بين A● و $\overleftrightarrow{CD}$.

4- يُقال إن دائرتين تمسان بعضهما البعض عندما تتقاطعان في نقطة فقط.

هناك نوعان من التماس:

أ) عندما تكون إحدى الدائرتين خارج الأخرى.

ب) عندما تكون إحدى الدائرتين داخل الأخرى.



الشكل 3-1-2: **على اليسار**: [تعريف 3-4] الدائرتان A● و D● تتماسان خارجيًا عند E، بينما الدائرتان C● و A● تتماسان داخليًا عند B. **على اليمين:** [تعريف 3-5] الوتر $\overline{CD}$ للدائرة A● يقسم الدائرة نفسها إلى قطعين DEC و DBC. القطع DEC (المظلل) يحده الوتر $\overline{CD}$ والقوس DEC، والقطع DBC (غير المظلل) يحده الوتر $\overline{CD}$ والقوس DBC.

5- **القطع الدائري** هو شكل ثنائي الأبعاد يحده وتر وقوس ويشتمل على نهايتي الوتر.

6- يقال إن الأوتار متساوية البعد عن المركز عندما تكون الأعمدة المبنية عليها من المركز متساوية الطول.

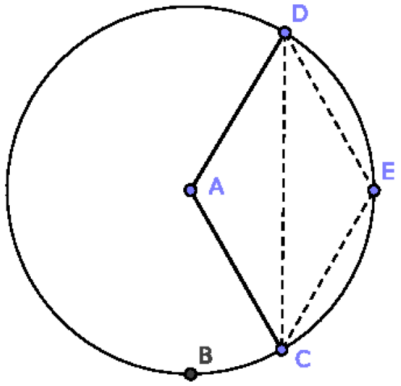
7- **الزاوية علي قطع** هي الزاوية المستقيمة المحصورة بين وترين يتقاطعان عند نفس النهاية على محيط الدائرة. في الشكل 3-1-3، ∠DCE هي زاوية على قطع. راجع أيضًا [3-21].

8- **زاوية القطع** هي الزاوية غير المستقيمة المحصورة بين وتر القطع والمماس عند أي من النهايتين. في الشكل 3-1-3، القوس DEC هو زاوية القطع DEC. هذه الزوايا تظهر فقط في البرهان الأصلي لـ [3-16].

9- الزاوية على القطع يقال إنها تقف على قوسها المترافق.

10- الأقواس المتشابهة هي التي تحصر زوايا متساوية.

11- يتكون **قطاع الدائرة** من نصفي قطر والقوس المحصور بينهما. في الشكل 3-1-3، A ●، نصف القطر $\overline{AD}$، ونصف القطر $\overline{AC}$ يُشكلان القطاعين DACE و DACB.



الشكل 3-1-3: [تعريف 3-8]و [تعريف 3-9] و [تعريف 3-11]

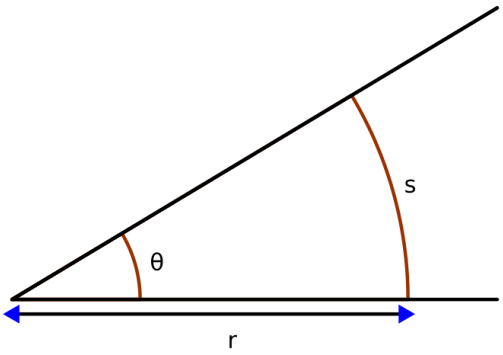
12- **الدوائر متحدة المركز** هي الدوائر التي لها نفس المركز.

13- النقاط التي تقع على محيط نفس الدائرة يقال إنها **تقع على نفس الدائرة**.

14- الشكل **الرباعي الدائري** هو شكل رباعي مدرج في دائرة.

15- تعريف حديث للزاوية: **الزاوية** في الهندسة هي الشكل الذي يتكون من شعاعين، يُطلق عليهما ضلعي الزاوية، ويشتركان في نهاية، تسمى **رأس الزاوية**. مقياس الزاوية هو النسبة بين طول القوس الدائري ونصف قطره، بحيث يكون القوس متمركز عند الرأس ومحدود بالضلعين.

حجم الزاوية هو أقل دوران يلزم لينطبق أحد ضلعيها على الآخر. الزوايا التي لها نفس الحجم تسمى **زوايا متطابقة**.

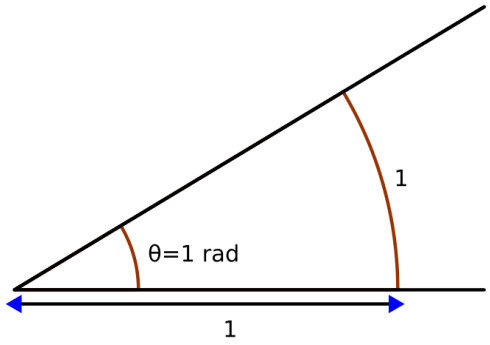


الشكل 3-1-4: قياس الزاوية θ هو حاصل قسمة s على r.

من أجل قياس الزاوية θ ، يُنشئ قوس دائري متمركز عند رأس الزاوية، على سبيل المثال، بفرجار. ثم يُقسم طول القوس s على نصف قطر القوس r، وربما يُضرب في ثابت التدريج k (الذي يعتمد على وحدات القياس المختارة):

$$\theta = \frac{ks}{r}$$

قيمة θ مُعرّفة بحيث تكون مستقلة عن حجم الدائرة لأنه إذا تغيّر طول نصف القطر، فإن طول القوس يتغير بنفس النسبة، وبالتالي فإن النسبة $\frac{s}{r}$ لا تتغير.



الشكل 3-1-5: $\theta = \frac{s}{r}\ \text{rad} = 1\ \text{rad}$.

يُستخدم عدد من الوحدات للتعبير عن الزوايا: والراديان والدرجة هما الأكثر استخدامًا.

تُعرَّف معظم وحدات قياس الزوايا بحيث تكون الدورة الواحدة (أي دائرة كاملة) تساوي n من الوحدات، حيث n عدد صحيح. في حالة الدرجات، $n = 360$.

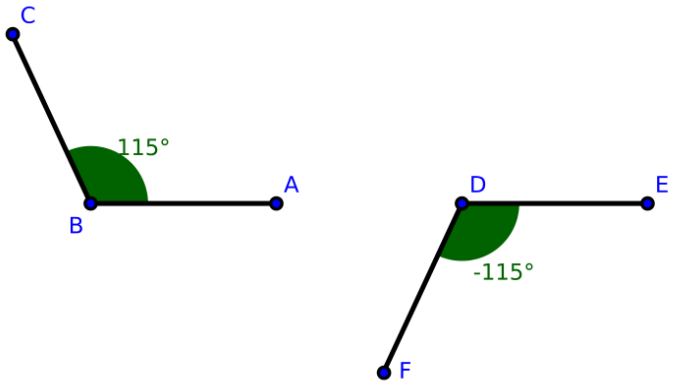
الراديان هو الزاوية المحصورة بقوس دائرة (أي أن الزاوية تقابل القوس) له نفس طول نصف قطر الدائرة.

عندما تُستخدم وحدة الراديان، فإن الزوايا تكون بلا أبعاد. تُستخدم الراديان تقريبًا في جميع الأعمال الرياضية التي تتجاوز الهندسة العملية البسيطة. بسبب الخصائص المرضية و "الطبيعية" التي تُظهرها الدوال المثلثية عندما تكون مدخلاتها بالراديان. الراديان هو وحدة قياس الزوايا في نظام الوحدات الدولي.

الدرجة، المكتوبة على شكل دائرة صغيرة مرتفعة (°)، تساوي $\frac{1}{360}$ دورة، لذا فإن الدورة الواحدة تساوي 360 درجة. يمكن كتابة كسور الدرجات بالتدوين العشري العادي (مثل $3.5°$ ثلاث درجات ونصف)، ولكن الوحدات الفرعية الستينية "الدقيقة" و "الثانية" من نظام "الدرجة-الدقيقة-الثانية" تُستخدم أيضًا، خاصةً للإحداثيات الجغرافية وفي علم الفلك والمقذوفات.

مع أنّ تعريف قياس الزاوية لا يدعم مفهوم الزاوية السالبة، إلا أنه من المفيد في كثير من الأحيان استخدام قيم موجبة وسالبة لتمثيل الاتجاهات و/أو الدورانات في اتجاهات معاكسة بالنسبة إلى مرجع.

في نظام الإحداثيات الديكارتية ثنائي الأبعاد، تُعرَّف الزاوية عادةً بضلعيها، بشرط أن يكون رأسها عند الأصل. يقع الضلع الأول على المحور x الموجب، بينما يُعرف الضلع الآخر حسب القياس من الضلع الأول بالراديان أو الدرجات أو الدورات. تُمثِل الزوايا الموجبة استدارة باتجاه المحور y الموجب، وتُمثِل الزوايا السالبة استدارة باتجاه المحور y السالب. عندما تُمثَل الإحداثيات الديكارتية بالموضع القياسي، الذي يُعرَّف بأنه المحور x إلى اليمين والمحور y لأعلى، يكون الدوران الموجب عكس اتجاه عقارب الساعة والدوران السالب في اتجاه دوران عقارب الساعة.



الشكل 3-1-6: ∠ CBA موجبة، ∠ EDF سالبة

16- لأي نقطتين F و P إذا كانت مساحة المستطيل OP · OF تساوي مساحة مربع نصف قطر الدائرة التي مركزها O، فإن F و P تسمى **نقطتين متعاكستين** بالنسبة للدائرة.

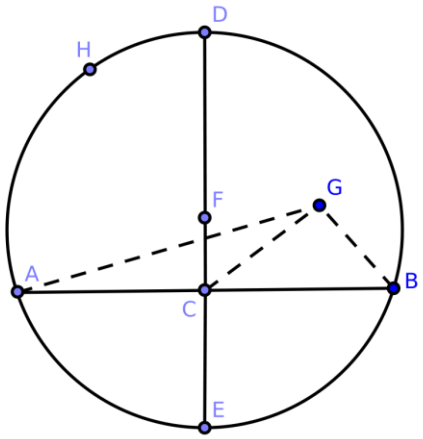
17- **مكمل القوس** هو المقدار الذي ينقص القوس ليكون نصف دائرة، أو زاويتين قائمتين.

2-3 قضايا من الكتاب الثالث

القضية 3-1. مركز الدائرة I.

من الممكن تحديد موقع مركز الدائرة.

الإثبات أنشئ دائرة وخذ أي نقطتين A، B على محيطها. أنشئ $\overline{AB}$ ونصف $\overline{AB}$ عند C [1-10]. أنشئ $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ (بشرط أن D تقع على المحيط) ومد $\overline{CD}$ لتتقاطع مع المحيط عند E. نصف $\overline{DE}$ عند F. ندعي أن F مركز الدائرة.



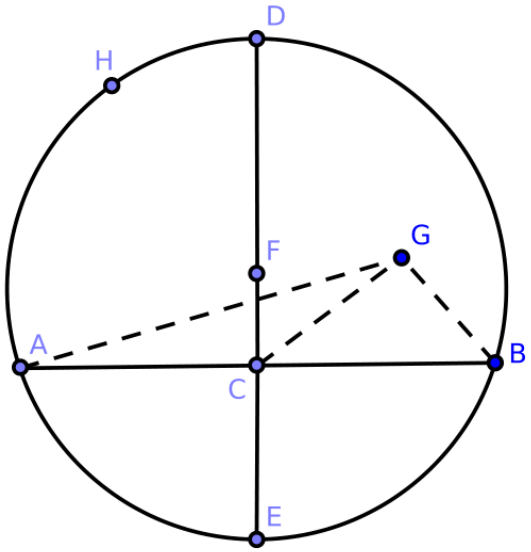
الشكل 3-2-1: [3-1]

افترض بدلاً من ذلك أن النقطة G، التي لا تقع على الوتر DE، هي مركز الدائرة. أنشئ $\overline{GA}$ و $\overline{GC}$ و $\overline{GB}$. لاحظ أن $\angle ACG = \angle ACD + \angle DCG$. من الواضح أن $\angle DCG > 0$.

في ▲ ACG و ▲ BCG: $CB = AC$ حسب البناء، $GA = GB$ (لأنهما نصفي قطر حسب الفرضية)، والضلع CG مشترك. حسب [1-8]، نجد أن $\angle ACG = \angle BCG$. لذلك، كل زاوية هي زاوية قائمة. لكن $\angle ACD$ قائمة حسب الإنشاء، لذلك $\angle DCG = 0$. لكن $\angle DCG > 0$ ، هذا تناقض.

ومن ثم، لا يمكن أن تكون أي نقطة مركز الدائرة بخلاف النقطة الموجودة على $\overline{DE}$. لأن جميع أنصاف الأقطار متساوية في الطول و $FD = FE$، يترتب على ذلك أن F، نقطة منتصف DE، هي مركز F●. هذا يثبت ادعاءنا

اثبات بديل:



الإثبات فكر في الكائنات المنشأة في الإثبات أعلاه: لأن $\overline{ED} \perp \overline{AB}$ و$\overline{ED}$ ينصف $\overline{AB}$ ، كل نقطة متساوية البعد عن النقطتين A و B يجب أن تقع على $\overline{ED}$ [1-10، # 2]. نظرًا لأن المركز بعيد بنفس القدر عن كل من A و B، يجب أن يقع المركز على $\overline{ED}$. وبما أن المركز يجب أن يكون أيضًا على مسافة متساوية من E و D، فإن المركز هو نقطة منتصف $\overline{ED}$

اللازمة 3-1-1. يمر الخط أو الشعاع أو القطعة التي تُنصف أي وتر في دائرة عموديًا عبر مركز الدائرة.

اللازمة 3-1-2. المحل الهندسي لمراكز الدوائر التي تمر عبر نقطتين ثابتتين هو الخط الذي يُنصف عموديًا الخط الذي يصل بين النقطتين.

اللازمة 3-1-3. إذا كانت A، B، C ثلاث نقاط على محيط دائرة، فإن الخطوط التي تنصف الوترين AB، BC عموديًا سوف تتقاطع عند مركز الدائرة.

تمارين

1- اثبت [لازمة. 3-1-1].

2- اثبت [لازمة. 3-1-2].

3- اثبت [لازمة. 3-1-3].

قضية 3-2. نقاط على خط داخل وخارج الدائرة.

لأي نقطتين على محيط دائرة والخط المار بهما:

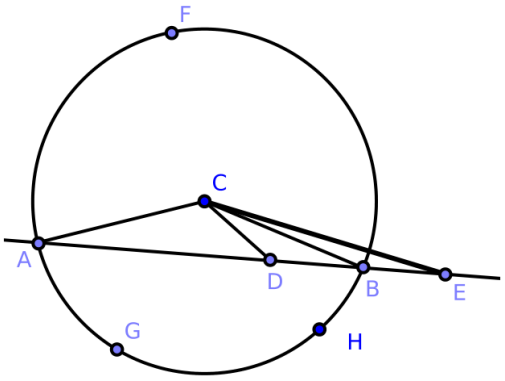
(1) تشكل النقاط بين نهايتي الخط، على المحيط، وترًا (أي أنها تقع داخل الدائرة).

(2) تقع نقاط الخط الأخرى خارج الدائرة.

الإثبات أنشئ ●C حيث A و B أي نقطتين على محيط ●C وأنشئ $\overleftrightarrow{AB}$. ندعي أن:

(1) $\overleftrightarrow{AB}$ هو وتر ●C.

(2) جميع نقاط $\overleftrightarrow{AB}$ التي ليست على $\overline{AB}$ تقع خارج الدائرة.



الشكل 3-2-2: [2-3]

خذ أي نقطة D على $\overline{AB}$ وأنشئ $\overline{CA}$ و $\overline{CD}$ و $\overline{CB}$. لاحظ أن $\angle ADC > \angle ABC$ حسب [1-16] ؛ لكن، $\angle BAC = \angle ABC$ لأن ▲CAB متساوي الساقين [1-5]. لذلك، $\angle DAC < \angle BAC$. حسب [1-29]، $CD < AC$ [1-29]، بالتالي $\overline{CD}$ أقل من نصف قطر ●C. بالتالي، يجب أن تقع D داخل الدائرة [تعريف 1-23]. وبالمثل، تقع كل نقطة أخرى بين A و B داخل ●C. أخيرًا، نظرًا لأن A و B هما نقطتان في محيط ●C، $\overline{AB}$ وتر. هذا يثبت الادعاء 1.

افترض E أي نقطة على $\overrightarrow{AE}$ بحيث إن $BA < EA$، وأنشئ $\overline{CE}$. حسب [1-16]، $\angle AEC < \angle ABC$ ؛ مما سبق، $\angle AEC < \angle CAE$. يترتب على ذلك أنه في ▲ACE، $CA < CE$، وبالتالي فإن النقطة E تقع خارج ●C. هذا يثبت الادعاء 2، ويكمل الإثبات.

اللازمة 3-2-1. أي ثلاث نقاط متسامتة لا يمكن أن تكون على محيط دائرة.

اللازمة 3-2-2. لا يمكن أن يتقاطع خط مستقيم أو شعاع أو قطعة مع دائرة في أكثر من نقطتين.

اللازمة 3-2-3. محيط الدائرة مقعر في كل مكان باتجاه المركز.

تمارين

1- اثبت [لازمة. 3-1-1].

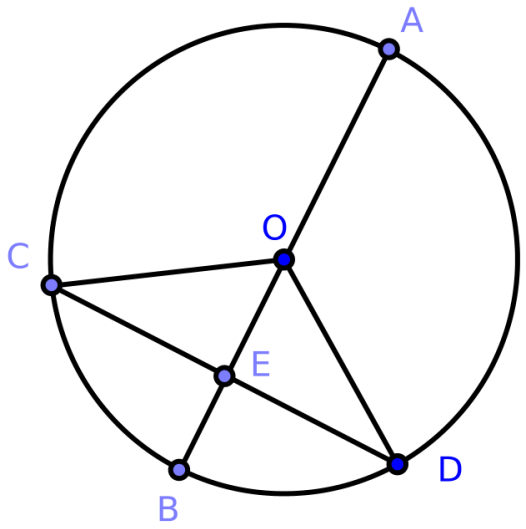
2- اثبت [لازمة. 3-1-2].

3- اثبت [لازمة. 3-1-3].

قضية 3-3. أوتار I.

لأي وترين في دائرة، إذا وفقط إذا كان أحدهما يمر عبر مركز الدائرة ويُنصف الآخر الذي لا يمر عبر المركز، فإن الوتران متعامدين.

الإثبات أنشئ O● والوترين AB و CD بحيث $\overline{AB}$ يحتوي على مركز O●. ندعي أن $\overline{AB}$ ينصف $\overline{CD}$ إذا وفقط إذا كان $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.



الشكل 3-2-3: [3-3]

افترض أن $\overline{AB}$ يُنصف $\overline{CD}$. أنشئ $\overline{OC}$ و $\overline{OD}$ ، في ▲CEO و ▲DEO: ED = CE حسب الفرضية، OC = OD لأن كل منهما نصف قطر O●، EO مشترك. حسب [1-8]، ∠DEO = ∠CEO. بما أنهما زاويتان متجاورتان، فكل منهما زاوية قائمة، وبالتالي $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.

افترض أن $\overline{AB} \perp \overline{CD}$. لأن OC = OD، ▲CDO متساوي الساقين؛ حسب [1-5]، ∠ODC = ∠OCD.
في ▲OEC و ▲OED: ∠ODC = ∠OCD، ∠DEO = ∠CEO لأن $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ ، ويتشاركان الضلع $\overline{EO}$. حسب [1-26]، ▲OED ≅ ▲OEC، لذلك ED = CE. لأن $\overline{ED} \oplus \overline{CE} = \overline{CD}$، $\overline{AB}$ يُنصف $\overline{CD}$ ، هذا يثبت ادعاءنا.

يمكن أيضًا إثبات الجزء الثاني من القضية بهذه الطريقة:

الإثبات. حسب [1-47]، نجد أن

$$OC^2 = OE^2 + EC^2$$

$$OD^2 = OE^2 + ED^2$$

لأن OC = OD، فإن $OC^2 = OD^2$ ، يترتب على ذلك أن $EC^2 = ED^2$. لذلك، EC = ED.

اللازمة 3-3-1. الخط الذي ينصف عموديًا أحد وترين متوازيين في دائرة ينصف الآخر عموديًا.

اللازمة 3-3-2. المحل الهندسي لنقاط المنتصف لنظام من الأوتار المتوازية في دائرة هو قطر الدائرة العمودي عليهم جميعًا.

اللازمة 3-3-3. إذا تقاطع خط مع دائرتين متحدتي المركز، فإن الجزأين المقطوعين بين الدائرتين متساويان في الطول.

اللازمة 3-3-4. الخط الذي يصل بين مركزي دائرتين متقاطعتين ينصف الوتر المشترك عموديًا.

ملاحظة: [3-1]، [3-3]، [3-3، لازمة. 1] بينهن علاقة بحيث إذا اثبت أي منهن، فإن الأخريين صحيحان حسب قاعدة التماثل.

تمارين

1- إذا وقف وتر في دائرة مقابل زاوية قائمة عند نقطة معينة، فإن المحل الهندسي لنقطة المنتصف يكون دائرة.

2- اثبت [3-3، لازمة. 1].

3- اثبت [3-3، لازمة. 2].

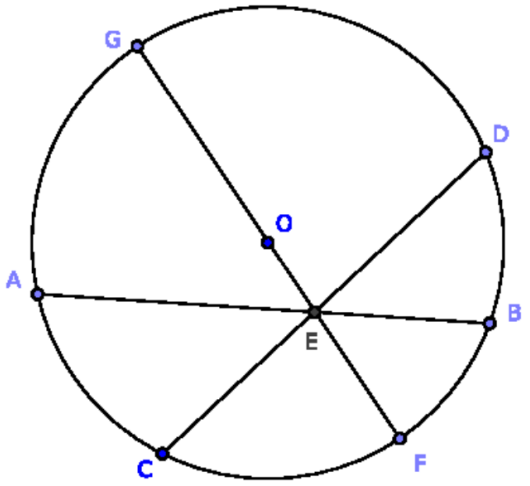
4- اثبت [3-3، لازمة. 3].

5- اثبت [3-3، لازمة. 4]. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

قضية 3-4. الأوتار II.

لأي وترين في دائرة بشرط أن يكون أحدهما على الأكثر قطرًا، فإنهما لا ينصفان بعضهما البعض.

الإثبات: أنشئ الدائرة O● والوترين AB و CD بشرط أن يكون أحدهما على الأكثر قطرًا و أن AB و CD يتقاطعان عند E حيث $\angle AEC > 0$. إذا $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ ليستا قطرين، فإنهما لا يحتويان O . أنشئ $\overline{OE}$ ومد $\overline{OE}$ لإنشاء $\overline{FG}$. ندعي أنه لا يمكن أن $AE = EB$ و $CE = ED$.



الشكل 3-2-4: [4-3]

افترض بدلاً من ذلك أن $AE = EB$ و $CE = ED$. حسب [3-3]، $\angle OEA$ هي زاوية قائمة. وعلى نحو مماثل، $\angle OEC$ هي زاوية قائمة، أو $\angle OEC = \angle OEA$. لكن $\angle OEC = \angle OEA + \angle AEC$، ولذلك $\angle AEC = 0$. يترتب على ذلك أن $\angle AEC > 0$ و $\angle AEC = 0$، هذا تناقض.

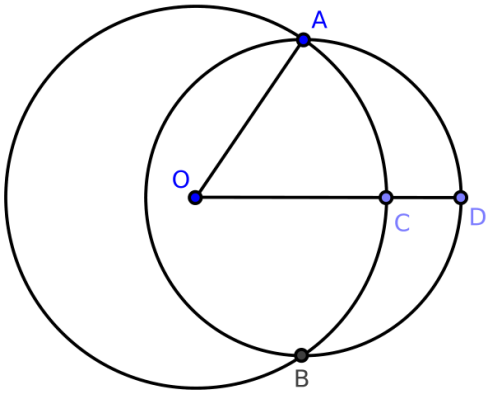
وبالتالي لا يمكن أن $AE = EB$ و $CE = ED$، هذا يكمل الإثبات.

اللازمة 3-4-1. إذا نصف وتران في دائرة بعضهما البعض، فإنهما قطران.

القضية 3-5. الدوائر غير متحدة المركز I.

إذا تقاطعت دائرتان عند نقطتين فقط، فإنهما غير متحدتي المركز.

الإثبات أنشئ ABC● و ABD ● اللتين يتقاطعان عند A و B؛ ندعي أن ABC● و ABD ● غير متحدتي المركز.



الشكل 3-2-5: [3-5]

افترض بدلاً من ذلك أن ABC● و ABD● لهما نفس المركز، O. أنشئ $\overline{OA}$ و $\overline{OCD}$ حيث A و B و C و D نقاط مختلفة. لاحظ أن $CD > 0$.

لأن O مركز ABC●، $OA = OC$. لأن O مركز ABD●، $OA = OD$؛ ومن ثم، $OD = OC$ حيث $\overline{OD} = \overline{OC} \oplus \overline{CD}$. يترتب على ذلك أن $CD = 0$ و $CD > 0$، هذا تناقض. لذلك، ABC● و ABD ● غير متحدتي المركز.

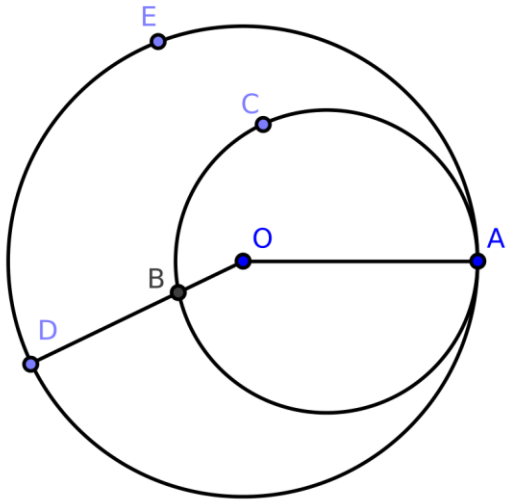
تمارين

1- لا يمكن أن تشترك دائرتان في ثلاث نقاط دون أن تتطابق. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

القضية 3-6. الدوائر غير متحدة المركز II.

إذا قطعت دائرة دائرة أخرى داخليًا عند نقطة فقط، فإن الدائرتين غير متحدتي المركز.

الإثبات أنشئ ADE● و ABC● بشرط أن تتقاطع ABC● مع ADE● داخليًا في A فقط. ندعي أن ADE● و ABC● غير متحدتي المركز.



الشكل 3-2-6: [6-3]

افترض بدلاً من ذلك أن ADE● و ABC● متحدتا المركز، وأن O مركز كل منهما. أنشئ $\overline{OA}$ و $\overline{OBD}$. لاحظ أن $BD > 0$ ؛ إذا كان $BD = 0$، فإن $B = D$ و ADE● و ABC● تتقاطعان عند نقطتين، على عكس الفرضية.

لأن O هو مركز كل من الدائرتين حسب الفرضية، $OA = OB$ و $OA = OD$ ؛ فإن $OB = OD$ و $\overline{OB} \oplus \overline{BD} = \overline{OD}$. ومن ثم، $BD = 0$، هذا تناقض. لذلك، فإن الدائرتين غير متحدتي المركز.

قضية 3-7. تفرد أطوال القطع من نقطة على القطر غير المركز.

لأي نقطة على قطر دائرة بخلاف المركز، أنشئ عددًا محدودًا من القطع إلى المحيط:

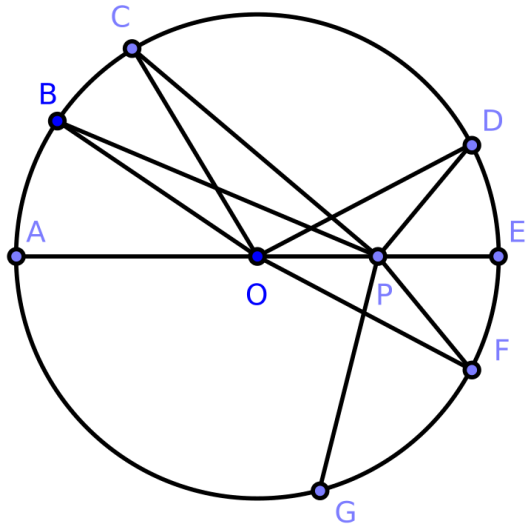
(1) ستحتوي القطعة الأطول من القطع المنشأة على مركز الدائرة.

(2) ستشكل أقصر قطعة منشأة مع أطول قطعة قطرًا.

(3) فيما يخص القطع الأخرى، كل قطعة لها نهاية على المحيط أقرب إلى إحدى نهايتي القطعة الأطول تكون أطول من أي قطعة أخرى لها نهاية أبعد عن نهاية القطعة الأطول.

(4) يمكن بناء قطعتين متساويتين فقط من كل نقطة إلى المحيط، وتقع كل قطعة على جانب مختلف من القطر.

الإثبات أنشئ O● بشرط أن P نقطة على القطر $\overline{AE}$ بحيث تكون O و P نقطتين مختلفتين. أنشئ عددًا محدودًا من القطع من P إلى المحيط (PA، PB، PC، إلخ). لاحظ أن $\overline{PA}$ على القطر. سنثبت الادعاءات الأربع.



الشكل 3-2-7: [7-3] EAG●

1- أطول قطعة، $\overline{PA}$، هي القطعة التي تمر عبر O.

أنشئ $\overline{OB}$ حيث B هي نقطة على O●. من الواضح أن، $OA = OB$. من هذا نحصل علي $PA = OA + OP = OB + OP$. في ▲OPB: لأن $OB + OP > PB$ حسب [1-20]، $PA > PB$. لأن هذه المتباينة تنطبق على أي قطعة منشأة باستخدام هذه الطريقة، فإن $\overline{PA}$ هي أطول من كل القطع المنشأة.

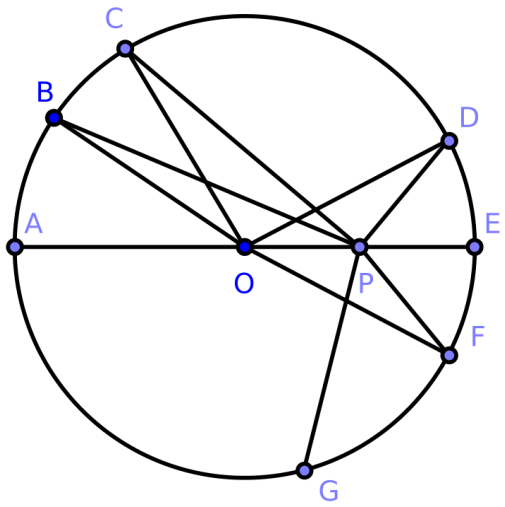
2- امتداد $\overline{PA}$ في الاتجاه المعاكس، $\overline{PE}$ ، أقصر من كل القطع المنشأة.

أنشئ $\overline{OD}$ وفي ▲OPD: حسب [1-20]، $OD > OP + PD$. لأن، $OD = OE = OP + PE$، فإن

$$OP + PD > OP + PE$$

$PD > PE$

لأن هذه المتباينة صحيحة لأي قطعة منشأة باستخدام هذه الطريقة، فإن $\overline{PE}$ أقصر من كل القطع المنشأة.



الشكل 3-2-8: [3-7] ●EAG

3- فيما يخص القطع الأخرى، كل قطعة لها نهاية على المحيط أقرب إلى إحدى نهايتي القطعة الأطول (PA) أطول من أي قطعة لها نهاية أبعد عن القطعة الأطول (أي $PA > PB > PC > PD$).

أنشئ $\overline{OC}$ ، في ▲POB و ▲POC: $OB = OC$ و$\overline{OP}$ مشترك. لأن $\angle POB = \angle POC + \angle BOC$ ، نجد أن $\angle POB > \angle POC$. حسب [1-24]، $PB > PC$. وبالمثل، $PC > PD$.

4- يتساوى طول القطعتين، وفقط القطعتين، اللتين يصنعان زاويتين متساويتين مع القطر وتقع كل منهما على جانب مختلف من القطر (أي $PD = PF$).

عند O، أنشئ $\angle POD = \angle POF$ وأنشئ $\overline{PF}$. فيما يخص ▲POD و ▲POF: $OD = OF$، OP مشترك، و$\angle POD = \angle POF$ حسب الإنشاء. حسب [1-4]، ▲POD ≅ ▲POF، ولذلك $\angle OPD = \angle OPF$ و $PD = PF$.

ندعي أنه لا يمكن إنشاء قطعة ثالثة من P تساوي $PD = PF$. افترض أن هذا ممكنًا وأن $PG = PD$. عندها $PG = PF$، هذا يتعارض مع الادعاء 3 أعلاه.

هذا يكمل الإثبات.

اللازمة 3-7-1. إذا أنشئت قطعتين متساويتين PD، PF من النقطة P إلى محيط الدائرة، فإن القطر المار بـ P ينصف ∠ DPF المتشكلة بالقطعتين.

اللازمة 3-7-2. إذا كانت P هي المركز المشترك للدوائر التي أنصاف أقطارها PA، PB، PC، PD، وما إلى ذلك، فإن:

(1) الدائرة التي نصف قطرها هو القطعة الأكبر (●P لها نصف قطر PA) تقع خارج ●O وتتقاطع معها عند A [تعريف 3-4].

(2) تقع الدائرة التي نصف قطرها هو القطعة الأصغر (P● لها نصف قطر PE) داخل O● وتتقاطع معها عند E.

(3) الدائرة ذات أي من أنصاف الأقطار الأخرى (مثل PD) تتقاطع مع O● في نقطتين (مثل D، F).

تمارين

1- اثبت [لازمة. 3-7-1].

2- اثبت [لازمة. 3-7-2].

ملحوظة [3-7] هي توضيح جيد للتعريف المهم التالي: إذا غَيَّر مقدار هندسي موضعه باستمرار وفقًا لأي علاقة مُعرفة جيدًا، وإذا احتفظ بنفس القيمة طوال الوقت، يُقال إنه ثابت (مثلما أن نصف القطر لدائرة ثابت).

ولكن إذا زاد المقدار لبعض الوقت ثم بدأ في الانخفاض، فيقال إنه "الأقصى" عندما تتوقف الزيادة. لذلك في الشكل السابق، PA التي نفترض أنها تدور حول P وتلتقي الدائرة، هي القطعة الأكبر.

مرة أخرى، إذا انخفضت لبعض الوقت، ثم بدأت في الزيادة، فهي الأصغر عند بداية الزيادة. لذا فإنّ PE، التي نفترض أنها تدور حول P وتلتقي الدائرة، هي الأصغر. [3-8] ستوفر توضيحات أخرى لهذا المفهوم.

القضية 3-8. أطوال القطع من نقطة خارج الدائرة وتفردها.

لأي نقطة خارج دائرة، إذا أنشئت، من تلك النقطة، قطع بشرط أن تتقاطع مع محيط الدائرة عند نقطتين، واحدة على الجانب "الخارجي" أو المحدب من المحيط والأخرى على "الداخلي" أو المقعر من المحيط. افترض قطعة منشأة تمر خلال مركز الدائرة وأخريات داخل نفس نصف الدائرة ولكن ليس عبر مركز الدائرة. فإن:

(1) تمر القطعة الأكبر عبر المركز.

(2) تكون القطع الأقرب إلى القطعة المارة عبر المركز أكبر في الطول من الأبعد.

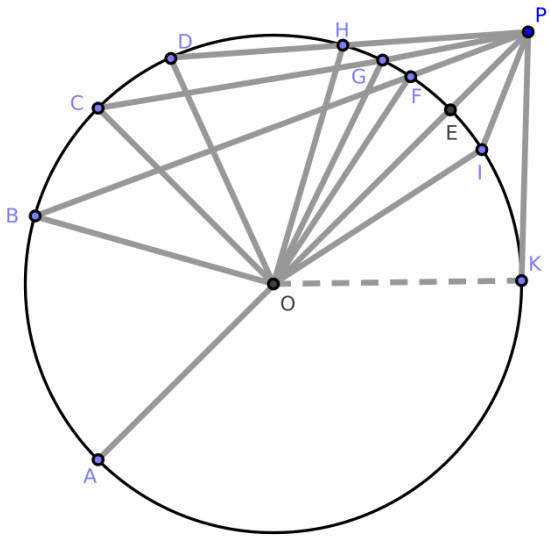
(3) إذا أنشئت قطع إلى المحيط المحدب، فإن القطعة الأصغر هي القطعة التي تمر عبر المركز عند مدها.

(4) في القطع الأخرى، تكون القطعة الأقرب من القطعة الأصغر أصغر من القطعة الأبعد.

(5) من النقطة خارج الدائرة، يمكن إنشاء قطعتين متساويتين إلى المحيط المقعر أو المحدب، وكلاهما يصنع نفس الزاوية مع الخط المار عبر المركز.

(6) لا يمكن إنشاء ثلاثة قطع متساوية أو أكثر من النقطة خارج الدائرة إلى أي من المحيطين.

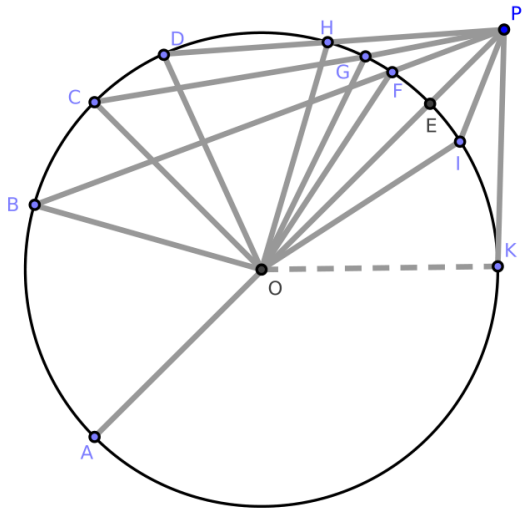
الإثبات أنشئ O●، والنقطة P خارج O●، وجميع النقاط المشار إليها في الشكل أدناه. سنثبت كل ادعاء على حدى.



الشكل 3-2-9: [8-3] O●

1- القطعة الأكبر تمر عبر المركز.

لاحظ أن OA = OB ولذلك AP = OA + OP = OB + OP. في ▲BOP: OB + OP > BP [20-1].
لذلك، AP > BP.



الشكل 3-2-10: [3-8] O●

2- تكون القطع الأقرب إلى القطعة المارة بالمركز أكبر في الطول من القطع الأبعد.

في ▲BOP و ▲COP: OB = OC، OP مشترك، و ∠COP < ∠BOP. لذلك، CP < BP [1-24]. وبالمثل، CP < DP ، إلخ.

3- إذا أنشئت قطع إلى محيط محدب، فإن القطعة الأصغر هي التي تمر عبر المركز عند مدها.

في ▲OFP: OF + FP > OP = OE + EP [1-20]. لأن OF = OE، نجد أن FP > EP.

4- من القطع الأخرى، تكون القطعة الأقرب من الأصغر أصغر من القطعة الأبعد.

في▲GOP و ▲FOP: GO = FO، OP مشترك، و ∠FOP < ∠GOP. حسب [1-24]، FP < GP. وبالمثل، GP < HP.

5- من النقطة خارج الدائرة، يمكن إنشاء قطعتين متساويتين إلى المحيط المقعر أو المحدب، وكل منهما يصنع نفس الزاوية مع الخط المار عبر المركز.

أنشئ ∠POI بحيث إن ∠POI = ∠POF [1-23]، و في▲IOP و ▲FOP: IO = FO، $\overline{OP}$ مشترك، و ∠IOP = ∠POF حسب الإنشاء. حسب [1-4]، IP = FP. تستوفي القطعتان IP و FP المتطلبات المذكورة أعلاه، هذا يثبت ادعاءنا.

6- لا يمكن إنشاء ثلاث قطع متساوية أو أكثر من أي نقطة خارج دائرة إلى أي من المحيطين.

أعلاه، حصلنا على IP = FP. ندعي أنه لا يمكن إنشاء قطعة ثالثة من P تساوي IP و FP. افترض أن هذا ممكن وأن PK = PF. ولكن، حسب الادعاء 4، PK < PF. هذا التناقض يثبت ادعاءنا.

اللازمة 3-8-1. إذا مدت $\overline{PI}$ لتلتقي الدائرة عند L، فإن PB = PL.

اللازمة 3-8-2. إذا أنشئت القطعتين المتساويتين من P إلى المحيط المحدب أو المقعر، فإن القطر عبر P ينصف الزاوية بينهما، وتكون الأجزاء المقطوعة، التي تقطعها الدائرة، متساوية في الطول.

اللازمة 3-8-3. إذا كان P هو المركز المشترك للدوائر التي أنصاف أقطارها قطع منشأة من P إلى محيط O●، فإن:

أ) الدائرة التي يكون نصف قطرها هو القطعة الأصغر (PE) تكون متصلة خارجيًا بـ O● [تعريف 3-4].

ب) الدائرة التي يكون نصف قطرها هو القطعة الأكبر (PA) يكون متصلة داخليًا بـ O●.

ج) الدائرة التي يكون نصف قطرها أي من القطع الأخرى (PF) تتقاطع مع O ● عند نقطتين (F، I).

تمارين

1- اثبت [لازمة. 3-8-1].

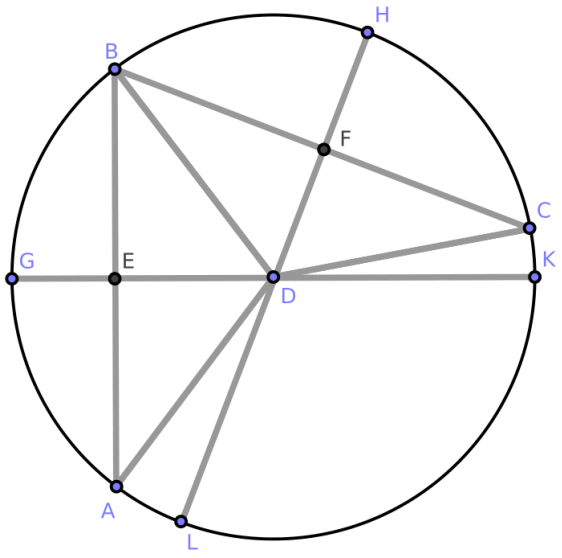
2- اثبت [لازمة. 3-8-2].

3- اثبت [لازمة. 3-8-3].

قضية 3-9. مركز الدائرة II.

النقطة داخل الدائرة التي يمكن منه بناء ثلاث قطع متساوية أو أكثر إلى المحيط هي مركز تلك الدائرة.

الإثبات أنشئ ABC● والقطع المتساوية DA و DB و DC. ندعي أن D هو مركز ABC●.



الشكل 3-2-11: [3-9]

أنشئ $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ ونصفهما عند النقطتين E و F، على التوالي [1-10]. ثم أنشئ $\overline{GEDK}$ و $\overline{LDFH}$.

في ▲AED و ▲BED: $\overline{ED}$ مشترك، $AE = EB$، و $DA = DB$ لأن كل منهما نصف قطر ABC●. حسب [1-8] ▲AED ≅ ▲BED، ولذلك، $\angle AED = \angle BED$؛ ولذلك، $\angle AED$ و $\angle BED$ كل منهما زاوية قائمة.

لأن $\overline{GEDK} \perp \overline{AB}$ و $\overline{GEDK}$ ينصف $\overline{AB}$، [3-1، لازمة. 1] تنص على أن مركز ABC ● هو نقطة على $\overline{GEDK}$. وبالمثل، فإن مركز ABC ● هو نقطة على $\overline{LDFH}$. لأن $\overline{GEDK}$ و $\overline{LDFH}$ يتقاطعان عند D، فإن D هو مركز ABC●.

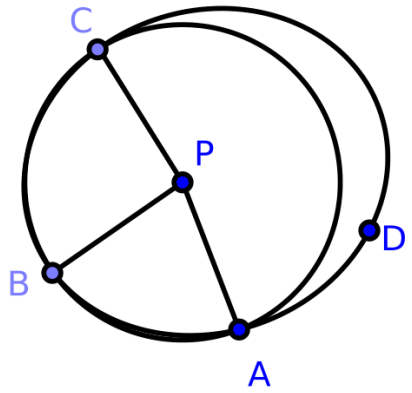
اثبات بديل:

الإثبات لأن $LD = AD$، القطعة التي تنصف $\angle ADL$ تمر عبر المركز [3-7، لازمة. 1]. وبالمثل، فإن القطعة التي تنصف $\angle BDA$ تمر عبر المركز. ومن ثم، فإن نقطة تقاطع هذين المنصفين، D، هي المركز.

القضية 3-10- تفرد الدوائر.

إذا اشتركت دائرتان في أكثر من نقطتين من محيطيهما، فإنهما متطابقتان.

الإثبات أنشئ ABC● و DAB ● بشرط أن يكون بينهما أكثر من نقطتين مشتركتين. ندعي أن ABC● و DAB● يتطابقان.



الشكل 3-2-12: [3-10]

افترض أن ABC● و DAB● تشتركان في ثلاث نقاط (A, B, C). من P، مركز ABC●، أنشئ القطع PA، PB، PC ؛ لأن كل منهم نصف قطر، $PA = PB = PC$.

لأن DAB● دائرة و P نقطة يمكن منها إنشاء ثلاثة قطع متساوية PA و PB و PC إلى محيطها، فإن P هي أيضًا مركز DAB● [3-9]. حسب [تعريف 3-1] ABC● و DAB ● تتطابقان، مما يثبت ادعاءنا.

اللازمة 3-10-1. لا يمكن لأي دائرتين غير متطابقتين أن تشتركان في أكثر من نقطتين.

ملحوظة على غرار [3-10، لازمة. 1]، لا يمكن أن يكون هناك أكثر من نقطة مشتركة بين خطين غير متطابقين.

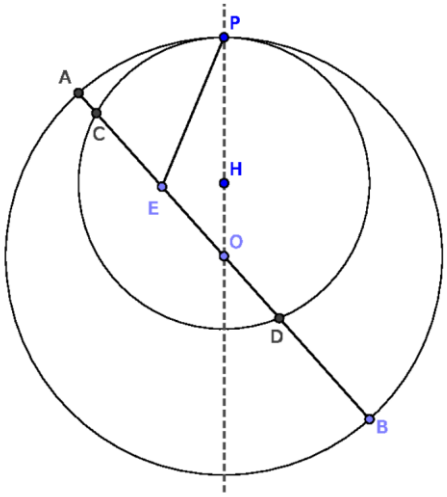
التمارين.

1- اثبت [لازمة. 3-10-1].

القضية 3-11. القطع التي تحتوي على مراكز الدوائر.

إذا مست دائرة دائرة أخرى داخليًا عند نقطة ما، فيجب أن يحتوي الخط الذي يربط بين مركزي الدائرتين على نقطة التقاطع.

الإثبات أنشئ ●O و ●H بشرط أن ●H تمس ●O داخليًا عند P. أيضًا أنشئ $\overleftrightarrow{OH}$. ندعي أن $\overleftrightarrow{OH}$ يحتوي على P.



الشكل 3-2-13: [3-11]

افترض بدلاً من ذلك أن E هي مركز ●H بشرط أن E لا تقع على $\overleftrightarrow{OP}$، وأنشئ $\overline{EP}$. مد $\overline{OE}$ لتتقاطع مع ●H عند C و D وتتقاطع مع ●O عند A و B. لأن E نقطة على قطر ●O بين O و A، $EA < EP$ [3-7].

لاحظ أن $EA = EC + CA$. لأن $CA > 0$، $EA > EC$. لاحظ أيضًا أن $EP = EC$ لأن كل منهما نصف قطر ●H ، ولذلك $EA > EP$. لكن $EA < EP$ أعلاه؛ هذا تناقض يوضح أن مركز الدائرة الداخلية، H، يجب أن يقع على $\overleftrightarrow{OP}$ ؛ أي أن $\overleftrightarrow{OP}$ يحتوي على H. هذا يكافئ قولنا أن $\overleftrightarrow{OH}$ يحتوي على P، هذا يكمل الإثبات.

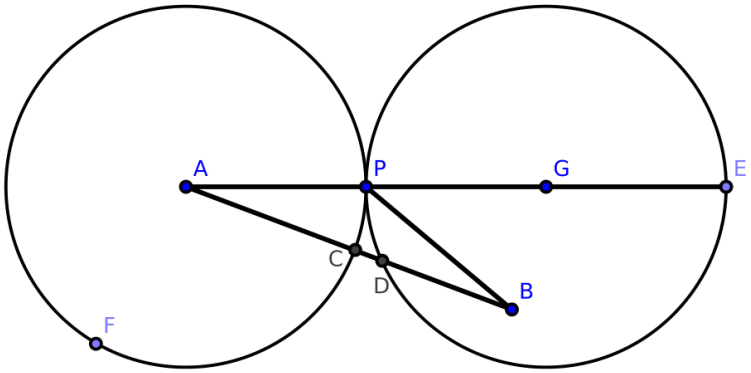
اثبات بديل:

الإثبات لأن EP قطعة منشأة من نقطة داخل الدائرة ●O إلى محيط ●O ولكن ليست جزء من القطر المار عبر E، فإن الدائرة التي يكون مركزها E ونصف قطرها EP تقطع ●H عند P [3-7، لازمة. 2] وتمسها أيضًا عند P حسب الفرضية، هذا تناقض. حجة مماثلة تنطبق على جميع النقاط التي ليست على $\overline{OP}$. وعلى هذا، يجب أن يقع مركز ●O على $\overline{OP}$.

القضية 3-12. الدوائر المتقاطعة I.

إذا تقاطعت دائرتان خارجيًا عند نقطة فقط، فإن القطعة التي تصل بين مركزيهما تحتوي على نقطة التقاطع.

الإثبات أنشئ ●PCF و ●PDE اللتين يتقاطعان خارجيًا عند النقطة P. ندعي أن $\overline{AG}$ يحتوي على P .



الشكل 3-2-14: [3-12]

أنشئ $\overline{APE}$. ادعاء مكافئ لما ورد أعلاه هو أن $\overline{APE}$ تحتوي على G.

افترض بدلاً من ذلك أن B هي مركز ●PDE ولا يقع على $\overline{APE}$. أنشئ $\overline{AB}$، التي تتقاطع مع ●PDE عند D و ●PCF عند C ولكن لا تتقاطع عند P. أيضًا، أنشئ $\overline{BP}$. وفقًا لفرضيتنا، $AC = AP$ و $BD = BP$. بالتالي

$$AC + DB = AP + BP$$

لاحظ أيضًا أن $\overline{AB} = \overline{AC} \oplus \overline{CD} \oplus \overline{DB}$ حيث $CD > 0$ ؛ يترتب على ذلك أن $AB > AC + DB$. حسب المعادلة المذكورة أعلاه، $AB > AP + BP$.

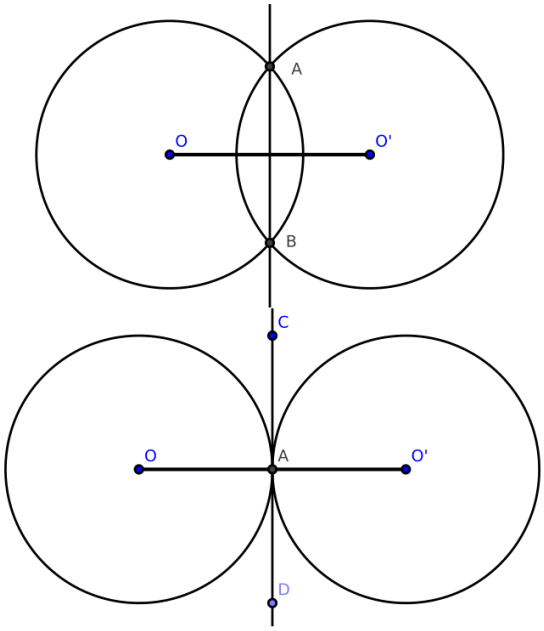
في ▲APB: نجد أن أحد أضلاع ▲APB أكبر من مجموع الضلعين الآخرين، هذا يتناقض مع [1-20]. لذلك، يقع مركز ●PDE على $\overline{APE}$ عند G. يحتوي $\overline{AG}$ على P، وهذا يكمل البرهان.

إثبات بديل:

الإثبات افترض أن مركز ●PDE يقع على $\overline{BP}$. لأن $\overline{BP}$قطعة منشأة من نقطة خارج ●PCF إلى محيطها والتي لا تمر عبر المركز إذا مدت، فإن الدائرة التي يكون مركزها B و نصف قطر $\overline{BP}$ يجب أن تقطع الدائرة ●PCF عند P [3-8، لازمة.3].

ومع ذلك، فإن دائرة كهذه تمس ●PCF عند P حسب الفرضية، وهذا تناقض. لأن $\overline{BP}$ هي أي قطعة بخلاف $\overline{PE}$، يجب أن يقع مركز ●PDE على $\overline{PE}$.

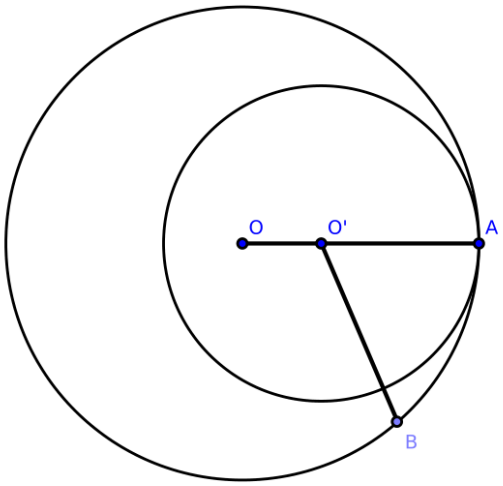
ملحوظة [3-11] و [3-12] يمكن كتابتهما كمبرهنة واحدة: "إذا تماست دائرتان في أي نقطة، فإن المركزين وهذه النقطة يكونوا متسامتين." هذه حالة حدية للمبرهنة المعطاة في [3-3، لازمة. 4]: "الخط الذي يربط بين مركزي دائرتين متقاطعتين ينصف الوتر المشترك عموديًا."



الشكل 3-2-15: [3-12]، افترض أن O● و O′● لهما نقطتا تقاطع، A و B. افترض أيضًا أن A تظل ثابتة بينما تتحرك الدائرة الثانية بشرط أن تتطابق النقطة B، في النهاية، مع A. لأن القطعة $\overline{OO'}$ تنصف دائمًا $\overline{AB}$، فإن $\overline{OO'}$ تتقاطع مع A. نتيجة لهذه الحركة، يصبح الوتر المشترك $\overline{CD}$ مماسًا لكل دائرة عند A.

اللازمة 3-12-1. إذا تماست دائرتان، فإن نقطة تقاطعهما هي اتحاد نقطتي تقاطع. (أي عند حساب عدد النقاط التي تتقاطع عندها الدائرتان، يمكننا اعتبار نقطة التقاطع هذه نقطتين.)

اللازمة 3-12-2. إذا تماست دائرتان في نقطة، فلا يمكن أن يكون لهما أي نقطة مشتركة أخرى.



الشكل 3-2-16: [3-2، لازمة. 2]

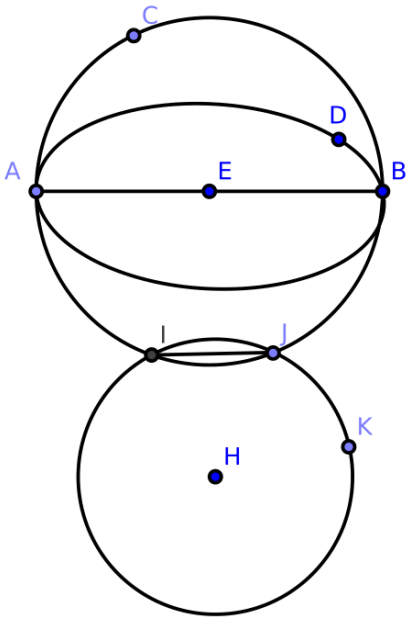
وذلك لأن أي دائرتين لا يمكن أن تحتويا على أكثر من نقطتين مشتركتين [3-10] ونقطة تماسهما تكافئ نقطتين، فلا يمكن أن يكون لدائرتين متماستين أي نقطة أخرى مشتركة. فيما يلي إثبات صوري لهذه اللازمة:

أنشئ O● و O′● حيث A هي نقطة التقاطع، وافترض أن O′ تقع بين O و A. خذ أي نقطة أخرى B في محيط O●، وأنشئ $\overline{O'B}$. حسب [3-7]، $O'B > O'A$. لذلك، تقع B خارج محيط الدائرة الداخلية. ومن ثم، لا يمكن أن تكون B مشتركة لكلتا الدائرتين. نظرًا لأن النقطة B نقطة اعتباطية، لا يمكن أن يكون للدائرتين أي نقطة مشتركة أخرى باستثناء النقطة A.

القضية 3-13. الدوائر المتقاطعة II.

لا يمكن لدائرتين أن تتماسا في نقطتين داخليًا أو خارجيًا.

الإثبات نقسم الإثبات إلى حالتين: التماس الداخلي والتماس الخارجي



الشكل 3-2-17: [3-13]

حالة التماس الداخلي: افترض وجود دائرتين مختلفتين ACB● و ADB●، متماستين داخليًا عند النقطتين A و B. لأن الدائرتين متماستين عند A، تمر القطعة الواصلة بين مركزيهما عبر A [3-11]. وبالمثل، تمر القطعة الواصلة بين مركزيهما عبر B. ومن ثم، فإن مركزي هاتين الدائرتين والنقطتين A و B يقعون على $\overline{AB}$، ولذلك $\overline{AB}$ قطر لكل من الدائرتين. نَصف $\overline{AB}$ عند E: من الواضح أن E هي مركز كل من الدائرتين، أي إن الدائرتين متحدتي المركز. هذا يتناقض مع [3-5]، وبالتالي ACB● و ADB● لا يتماسان داخليًا عند نقطتين.

حالة التماس الخارجي: إذا مست الدائرتان E● و H ● خارجيًا عند النقطتين I و J بحيث I و J نقطتان مختلفتان، حسب [3-12]، تحتوي $\overline{EH}$ على النقطتين I و J ؛ بعبارة أخرى، I و J غير مختلفتين، هذا تناقض. وبالتالي، E● و H ● لا تتماسان خارجيًا عند نقطتين.

إثبات بديل لحالة التماس الداخلي:

الإثبات أنشئ خطًا ينصف $\overline{AB}$ عموديًا. حسب [3-1، لازمة. 1]، يمر هذا الخط عبر مركز كل من الدائرتين، وحسب [3-11] و [3-12] يجب أن يمر عبر كل نقطة تقاطع، وهذا تناقض. ومن ثم، لا يمكن لدائرتين أن تتماسا عند نقطتين.

ملحوظة هذه القضية هي استدلال مباشر من [3-12، لازمة. 1] أي أنه إذا احتسبت نقطة التماس بنقطتين، فإن أي تماسين سيكونان مكافئين لأربعة تقاطعات؛ لكن لا يمكن أن يكون هناك أكثر من تقاطعين [3-10]. كما أنه يترتب على [3-12، لازمة. 2]، أنه إذا تماست أي دائرتين عند النقطة (A)، فلا يمكن أن يكون بينهما أي نقطة أخرى مشتركة؛ وبالتالي، لا يمكنهما التماس مرة أخرى في B .

تمارين

1- إذا مست دائرة ذات مركز غير ثابت دائرتين ثابتتين خارجيًا، فإن الفرق بين بعدي مركزها عن مركزي الدائرتين الثابتتين يساوي فرق أو مجموع نصفي قطريهما، حسب نوع التماس (داخلي أو خارجي)؛ ما إذا كان نفس النوع في للحالتين أو نوعين مختلفين [تعريف 3-4].

2- إذا مست دائرة ذات مركز غير ثابت إحدى دائرتين ثابتتين داخليًا ومست الدائرة الثابتة الأخرى خارجيًا أو داخليًا، فإن مجموع بعدي مركزها عن مركزي الدائرتين الثابتتين يساوي مجموع أو فرق نصفي قطريهما، حسب نوع التماس بالدائرة الثانية؛ ما إذا كان داخليًا أم خارجيًا.

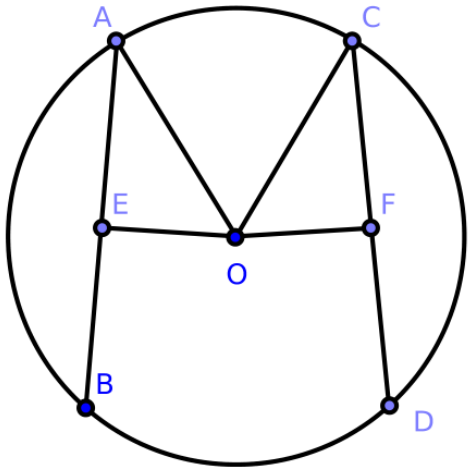
3- افترض أن دائرتين تتماسان خارجيًا. إذا أنشئ أي قاطع خلال نقطة التقاطع بحيث يقطع الدائرتين، مرة أخرى، في نقطتين، فإن أنصاف الأقطار المنشأة إلى هاتين النقطتين متوازيتان. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

4- افترض أن دائرتين تتماسان خارجيًا. إذا كان القطران في هاتين الدائرتين متوازيين، فإن الخط الممتد من نقطة التقاطع إلى نهاية لقطر منهما يمر عبر نهاية للآخر. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

القضية 3-14. تساوي أطوال الأوتار

تتساوى الأوتار في دائرة إذا، وفقط إذا، كانت متساوية البعد عن المركز.

الإثبات أنشئ O● التي فيها الوتران $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$. ندعي أن $AB = CD$ إذا وفقط إذا كانت $\overline{AB}$ و$\overline{CD}$ متساويتي البعد عن المركز.



الشكل 3-2-18: [3-14]

افترض أن $AB = CD$، أنشئ $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ و$\overline{OF} \perp \overline{CD}$. ندعي أن $EO = FO$.

أنشئ $\overline{AO}$ و$\overline{CO}$. لأن $\overline{AB}$ وتر في O● و $\overline{OE}$ قطعة عمودية منشأة من المركز إلى E، فإن $\overline{OE}$ تنصف $\overline{AB}$ [3-3]؛ أو $AE = EB$. وعلى نحو مماثل، $CF = FD$. لأن $AB = CD$ حسب الفرضية، $AE = CF$.

لأن $\angle OEF$ قائمة، $(AO)^2 = (AE)^2 + (EO)^2$ حسب [1-47]. وبالمثل، $(CO)^2 = (CF)^2 + (FO)^2$. بما أن $(AO)^2 = (CO)^2$و$(AE)^2 = (CF)^2$، لدينا $(EO)^2 = (FO)^2$، وبالتالي $EO = FO$.

افترض إنشاء $EO = FO$ بطريقة مشابهة لما ورد أعلاه. ندعي أن $AB = CD$.

أنشئ $\overline{AO}$ و$\overline{CO}$. حسب [1-47] وعلى نحو مماثل للإثبات أعلاه، $(AE)^2 + (EO)^2 = (CF)^2 + (FO)^2$ حيث $(EO)^2 = (FO)^2$ حسب فرضيتنا. ومن ثم $(AE)^2 = (CF)^2$، وبالتالي $AE = CF$. لكن $AB = 2 \cdot AE$ و $CD = 2 \cdot CF$ حسب [3-3]، ولذلك $AB = CD$.

تمارين

1- إذا انزلق وتر ذو طول معين في دائرة ثابتة، فعندئذٍ:

(أ) يكون المحل الهندسي لنقطة المنتصف دائرة؛

(ب) يكون المحل الهندسي لأي نقطة ثابتة على الوتر دائرة.

القضية 3-15. تباين أطوال الأوتار.

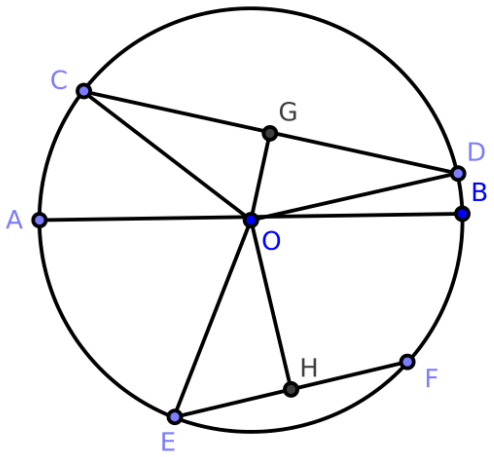
القطر هو أطول وتر في الدائرة، لأي وترين يكون الأقرب إلى المركز هو الأطول.

الإثبات أنشئ O● التي قطرها $\overline{AB}$ وفيها الوتران $\overline{CD}$ و $\overline{EF}$ بشرط أن يكون $\overline{CD}$ أقرب إلى O من $\overline{EF}$. ندعي أن:

(1) $\overline{AB}$ هو أطول وتر في الدائرة ؛

(2) $\overline{CD} > \overline{EF}$ ؛

(3) الأوتار الأطول أقرب إلى المركز من الأوتار الأقصر.



الشكل 3-2-19: [3-15]

(1) ندعي أن $\overline{AB}$ هو أطول وتر في الدائرة.

أنشئ $\overline{OC}$ و $\overline{OD}$ و $\overline{OE}$ وكذلك $\overline{OG} \perp \overline{CD}$ و $\overline{OH} \perp \overline{EF}$. لاحظ أن $AB = OA + OB = OC + OD$. في ▲CDO: $(OC + OD) > CD$ حسب [1-20]. لذلك، $AB > CD$. لأن اختيار $\overline{CD}$ كان اعتباطيًا، هذا يكمل الإثبات.

(2) ندعي أن $CD > EF$.

لأن $\overline{CD}$ أقرب إلى O من $\overline{EF}$ حسب الفرضية، فإنه يترتب عن ذلك أن $OG < OH$ [3-14]. لأن ▲OGC و ▲OHE مثلثان قائمان، نجد أن $(OC)^2 = (OG)^2 + (GC)^2$ و $(OE)^2 = (OH)^2 + (HE)^2$. بما أن $OC = OE$، $(OG)^2 + (GC)^2 = (OH)^2 + (HE)^2$. لكن $(OG)^2 < (OH)^2$، ولذلك $(GC)^2 > (HE)^2$. يترتب على ذلك أن $GC > HE$. بما أن $CD = 2 \cdot GC$ و $EF = 2 \cdot HE$ حسب [3-3]، $CD > EF$.

(3) الأوتار الأطول أقرب إلى المركز من الأوتار الأقصر.

افترض أن $CD > EF$. ندعي أن $OG < OH$.

كما في السابق، نجد أن $(OG)^2 + (GC)^2 = (OH)^2 + (HE)^2$. حسب فرضيتنا، $(GC)^2 > (HE)^2$. لذلك $(OG)^2 < (OH)^2$، وبالتالي $OG < OH$.

تمارين.

1- أقصر وتر يمكن بناؤه عبر نقطة داخل دائرة هو العمودي على القطر الذي يمر عبر تلك النقطة.

2- من أي نقطة، داخل دائرة أو خارجها، أنشئ وتر يساوي طول وتر معين.

3- من إحدى نقطتي التقاطع بين دائرتين، أنشئ قاطع

(أ) بشرط أن يكن مجموع الجزئين المقطوعين بالدائرتين هو الأقصى؛

(ب) يكون له أي طول أقل من الأقصى.

4- افترض أن دوائر تمس بعضها البعض خارجيًا عند A و B و C ومد الوترين $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ لاثنين منهما ليلتقيا بالدائرة الثالثة في النقطتين D و E. اثبت أن $\overline{DE}$ هو قطر الدائرة الثالثة ويوازي القطعة الواصلة بين مركزي الدائرتين الأخريين.

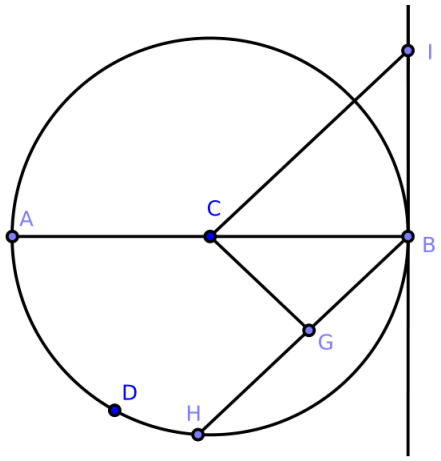
القضية 3-16. العمودي علي قطر دائرة.

يتقاطع العمود على قطر دائرة (من نهايته) مع المحيط عند نقطة فقط، وأي قطعة أخرى تمر بنهاية القطر تتقاطع مع الدائرة في نقطتين.

الإثبات أنشئ C ● التي فيها النقاط A و B و H على محيطها حيث $\overline{AB}$ هو قطر C●. أيضًا أنشئ $\overline{BH}$ و $\overleftrightarrow{BI} \perp \overline{AB}$ حيث يتقاطع $\overleftrightarrow{BI}$ مع C● عند B. ندعي أن:

(1) $\overleftrightarrow{BI}$ تمس C● عند B فقط؛

(2) $\overline{BH}$ تقطع C●.



الشكل 3-2-20: [3-16]

الادعاء 1: $\overleftrightarrow{BI}$ يمس C● عند B فقط.

افترض أن I هي أي نقطة على $\overleftrightarrow{BI}$ وأنشئ القطعة $\overline{CI}$. لأن $\angle CBI$ قائمة، $(CI)^2 = (CB)^2 + (BI)^2$ حسب [1-47]. يترتب علي ذلك أن $(CI)^2 > (CB)^2$، ولذلك $CI > CB$. حسب [3-2]، I تقع خارج C●. وبالمثل، فإن كل نقطة أخرى في $\overleftrightarrow{BI}$ باستثناء B تقع خارج C●. ومن ثم، يتقاطع $\overleftrightarrow{BI}$ مع C● عند B فقط.

الادعاء 2: $\overline{BH}$ تقطع C●.

أنشئ $\overline{CG} \perp \overline{BH}$. يترتب علي ذلك أن $(BC)^2 = (CG)^2 + (GB)^2$. لذلك $(BC)^2 > (CG)^2$، ولذلك $BC > CG$. حسب [3-2]، يجب أن تقع G داخل C●، وبالتالي إذا مدت $\overline{BG}$، يجب أن تتقاطع أيضًا مع C● عند H وبالتالي تقطعها.

هذا يكمل الإثبات

تمارين

1- لأي دائرتين متحدتي المركز، جميع أوتار الدائرة الأكبر التي تمس الدائرة الأصغر تكون متساوية في الطول. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- أنشئ خط موازٍ لأي خط يمس أي دائرة.

3- أنشئ خطًا عموديًا على أي خط يمس أي دائرة.

4- أنشئ دائرة مركزها عند نقطة معينة

(أ) وتمس خطاً معيناً؛

(ب) وتمس دائرة معينة.

كم عدد الحلول لهذه الحالة؟

5- أنشئ دائرة لها نصف قطر معين وتمس خطين معينين. كم عدد الحلول؟

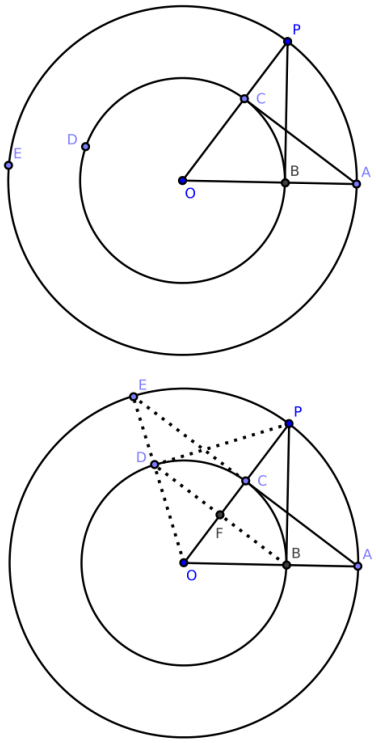
6- جد المحل الهندسي لمراكز نظام من الدوائر التي تمس أي خطين.

7- أنشئ دائرة لها أي نصف قطر وتمس أي دائرة وأي خط أو تمس أي دائرتين.

القضية 3-17. المماسات للدوائر I.

من الممكن بناء مماس لأي دائرة من نقطة خارج الدائرة.

الإثبات أنشئ ●O و P بشرط أن تكون P خارج ●O. نرغب في بناء المماس $\overline{BP}$ لـ ●O.



الشكل 3-2-21: [3-17] (α) (β)

أنشئ نصف القطر $\overline{OC}$ ومد $\overline{OC}$ لإنشاء $\overline{OP}$. أنشئ الدائرة ●O_1 التي مركزها O و نصف قطرها $\overline{OP}$ ، أيضا أنشئ $\overline{CA} \perp \overline{OP}$. أنشئ $\overline{OA}$، التي تتقاطع مع ●O في B، وأنشئ $\overline{BP}$. ندعي أن $\overline{BP}$ هي المماس المطلوب لـ ●O.

لأن O مركز ●O و ●O_1 ، فإن $OA = OP$ و $OB = OC$. في ▲AOC و ▲POB: $OA = OP$، $OB = OC$، وكل مثلث يتشارك $\angle POB = \angle AOC = \angle BOC$. حسب [3-4]، ▲POB ≅ ▲AOC ، ولذلك $\angle OCA = \angle OBP$.

لكن $\angle OCA$ قائمة حسب الإنشاء؛ وبالتالي $\angle OBP$ قائمة، وحسب [3-16]، $\overline{BP}$ تمس ●O عند B. حسب التعريف، فإن $\overline{BP}$ هي مماس لـ ●O عند النقطة B، هذا يثبت ادعائنا.

اللازمة 3-17-1. إذا مدت $\overline{AC}$ لإنشاء $\overline{AE}$ وأنشئت $\overline{OE}$، فستقطع ●O عند D. DP هو المماس الثاني لـ ●O عند P.

تمارين

1- أثبت أن المماسين $\overline{PB}$ و $\overline{PD}$ في [3-17] متساويان في الطول لأن مربع كل منهما يساوي مربع $\overline{OP}$ ناقص مربع نصف القطر.

2- إذا كان الشكل الرباعي محيطًا بدائرة، فإن مجموع طولي أي ضلعين متقابلين يساوي مجموع طولي الضلعين الآخرين.

3- إذا كان متوازي الأضلاع محيطًا بدائرة، فلا بد أن يكون معينًا، ومن ثم يتقاطع قطريه عند المركز.

4- إذا أنشئت $\overline{BD}$ وتقاطعت مع $\overline{OP}$ عند F، فعندئذٍ $\overline{OP} \perp \overline{BD}$

5- المحل الهندسي لتقاطع مماسين متساويين لدائرتين هو قطعة (تسمى المحور الأساسي أو خط القوة للدائرتين).

6- جد نقطة بشرط أن تكون المماسات منها إلى أي ثلاث دوائر متساوية. (تسمى هذه النقطة بالمركز الأساسي للدوائر الثلاث).

7- اثبت أن المستطيل $OF \cdot OP$ يساوي مربع نصف قطر O●. (ملاحظة: نحدد موقع النقاط المتعاكسة بالنسبة إلى O●. انظر التعريف أدناه.)

8- الجزء المقطوع على مماس متغير بواسطة مماسين ثابتين يقف مقابل زاوية ثابتة عند المركز.

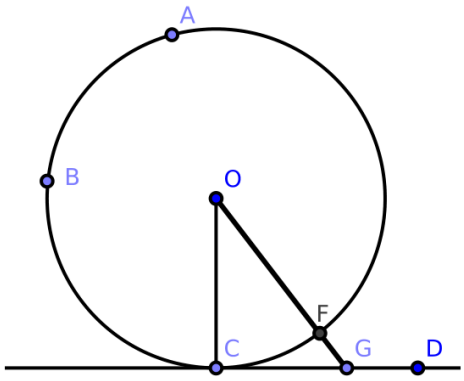
9- أنشئ مماسًا مشتركًا لدائرتين. وضح كيفية بناء قطعة تقطع دائرتين بشرط أن تكون الأوتار المقطوعة ذات أطوال معينة.

10- اثبت [لازمة. 3-17-1].

القضية 3-18. المماسات على الدوائر II.

إذا مس خط دائرة، فإن القطعة من مركز الدائرة إلى نقطة التقاطع مع الخط تكون عمودية على الخط.

الإثبات أنشئ ●O حيث النقطة C على محيطها، وأيضًا أنشئ $\overleftrightarrow{CD}$. وندعي أنه إذا $\overleftrightarrow{CD}$ مس ●O ، فإن $\overline{OC} \perp \overleftrightarrow{CD}$.



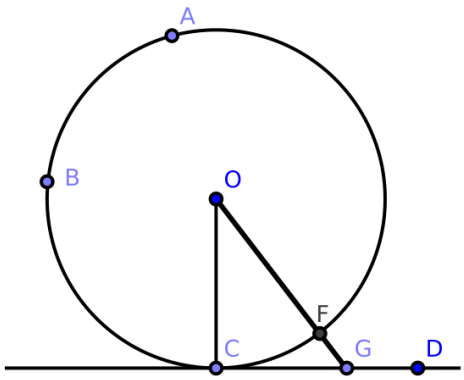
الشكل 3-2-22: [18-3]

افترض بدلاً من ذلك أن قطعة أخرى $\overline{OG}$ منشأة من المركز بشرط أن $\overline{OG} \perp \overleftrightarrow{CD}$ حيث تقطع $\overline{OG}$ الدائرة عند F. لأن الزاوية ∠OGC قائمة حسب الفرضية، الزاوية ∠OCG يجب أن تكون حادة [1-17]. حسب [1-19]، لكن $\overline{OG} = \overline{OF} \oplus \overline{FG}$ و$OC = OF$، ولذلك $OC < OG$، هذا تناقض. ومن ثم $\overline{OC} \perp \overleftrightarrow{CD}$.

القضية 3-19- المماسات للدوائر III.

لأي خط مماس لدائرة، يمر العمودي المبني من نقطة التقاطع عبر مركز الدائرة.

الإثبات افترض أن $\overleftrightarrow{AB}$ مماس لـ ●CDA. ندعي أنه إذا كان $\overline{AC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ ، فإن $\overline{AC}$ يحتوي على مركز ●CDA.



الشكل 3-2-23: [3-19]

افترض خلاف ذلك: أن O مركز ●CDA وأنشئ $\overline{AO}$. لاحظ أن $\angle OAC > 0$. لأن $\overleftrightarrow{AB}$ يمس ●CDA و $\overline{OA}$ مبنية من المركز إلى نقطة التقاطع، $\overline{OA} \perp \overleftrightarrow{AB}$ حسب [3-18]. لأن $\overline{AC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ حسب الفرضية، ∠OAB و∠CAB قائمتان.

يترتب على ذلك أن $\angle CAB = \angle OAB + \angle OAC$ و∠CAB = ∠OAB ، وبالتالي، $\angle OAC = 0$ و$\angle OAC > 0$، هذا تناقض. لذلك، المركز يقع على $\overline{AC}$.

اللازمة 3-19-1. إذا مست مجموعة من الدوائر نفس الخط عند نفس النقطة، فإن المحل الهندسي لمراكزها يكون عموديًا على الخط عند النقطة.

اللازمة 3-19-2. لنفترض أن لدينا دائرة وأي اثنين من الآتي:

(أ) مماس للمحيط؛

(ب) قطعة أو شعاع أو خط مستقيم مبني من مركز الدائرة إلى نقطة التقاطع.

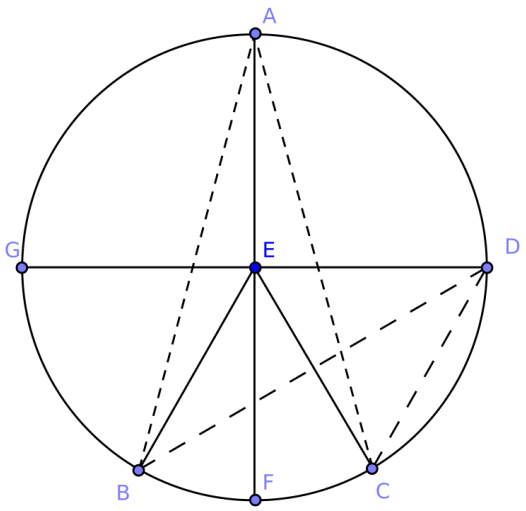
(ج) زوايا قائمة عند نقطة التقاطع.

فإنه حسب [3-16]، [3-18]، [3-19]، وقاعدة التماثل، تنتج الخاصية المتبقية. إذا كان لدينا (أ) و (ج)، فقد يكون من الضروري مد القطعة أو شعاع إلى مركز الدائرة: هذه حالات حدية لـ [3-1، لازمة. 1] و [3-3].

القضية 3-20. الزوايا عند مركز الدائرة وعلى المحيط.

الزاوية الموجودة عند مركز الدائرة هي ضعف الزاوية عند المحيط عندما يقف كل منهما على نفس قوس من المحيط.

الإثبات أنشئ E● التي نصف قطرها $\overline{EB}$، وأنشئ ∠BEC و ∠BAC حيث A و C و D هي نقاط على محيط E●. ندعي أن $\angle BEC = 2 \cdot \angle BAC = 2 \cdot \angle BDC$.



الشكل 3-2-24: [3-20]

أنشئ $\overline{AEF}$ ، في ▲EAB: لأن $EA = EB$، حسب [1-6] $\angle EBA = \angle EAB$ وبالتالي
$\angle BEF = \angle EAB + \angle EBA = 2 \cdot \angle EAB$. بما أنّ $\angle EBA + \angle EAB$ حسب [1-32]،
$\angle FEC = 2 \cdot \angle EAC$، وبالمثل في ▲EAC. يترتب على ذلك أن $\angle BEF = 2 \cdot \angle EAB$.

$$\angle BEC = \angle BEF + \angle FEC = 2 \cdot (\angle EAB + \angle EAC) = 2 \cdot \angle BAC$$

أنشئ $\overline{GD}$ و $\overline{BD}$ و $\overline{CD}$. بحجة مماثلة لما سبق، يمكننا إثبات أن $\angle GEC = 2 \cdot \angle EDC$ و $\angle GEB = 2 \cdot \angle EDB$. بما أنّ $\angle BEC = \angle GEC - \angle GEB$، نجد أن

$$\angle BEC = 2 \cdot (\angle EDC - \angle EDB) = 2 \cdot \angle BDC$$

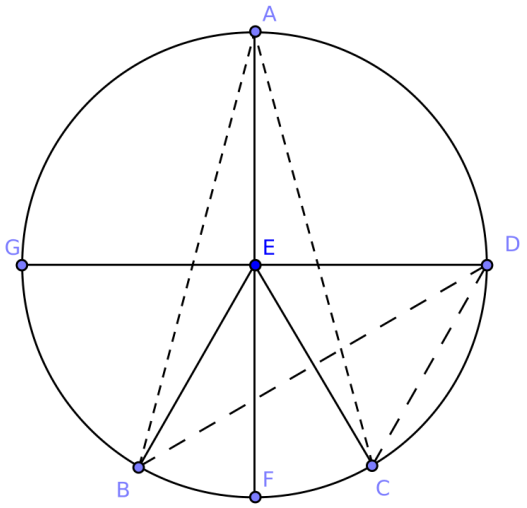
وهذا يُكمل الإثبات.

اللازمة 3-20-1. الزاوية على نصف دائرة هي زاوية قائمة.

القضية 3-21. الزوايا على الأوتار.

في أي دائرة، الزوايا الواقفة على نفس القوس متساوية في القياس.

الإثبات أنشئ E●، وأيضا أنشئ ∠BAC و ∠BDC على نفس القوس BFC. ندعي أن: ∠BDC = ∠BAC.



الشكل 3-2-25: [3-21]

حسب [3-20]، ∠BEC = 2 · ∠BAC = 2 · ∠BDC أو ∠BAC = ∠BDC. هذا يثبت ادعاءنا.

اللازمة 3-21-1. لأي مثلثين ACB ▲ و ADB ▲ يقفان على نفس القاعدة $\overline{AB}$ وزاويتا الرأس لهما متساويتان وعلى نفس الجانب من القاعدة، فإن النقاط الأربع A و C و D و B تقع على نفس الدائرة.

اللازمة 3-21-2. إذا كانت A و B نقطتين ثابتتين وإذا غيّرت C موضعها بشرط أن يكون للزاوية ∠ACB نفس القياس طوال الوقت، يكون المحل الهندسي لـ C دائرة. (أو: إذا علمت قاعدة المثلث والزاوية الرأسية، يكون المحل الهندسي للرأس دائرة).

تمارين

1- إذا علمت قاعدة المثلث والزاوية الرأسية، جد المحل الهندسي

(أ) لتقاطع أعمدته؛

(ب) لتقاطع المنصفات الداخلية لزاويتي القاعدة؛

(ج) لتقاطع المنصفات الخارجية لزاويتي القاعدة؛

(د) لتقاطع المنصف الخارجي لزاوية للقاعدة والمنصف الداخلي للأخرى.

2- إذا علمت مجموع مربعي أي قطعتين، اثبت أن مجموعها هو الأقصى عندما تكون القطعتان متساويتين في الطول.

3- من بين كل المثلثات التي لها نفس القاعدة وزاوية الرأس، أثبت أن مجموع أضلاع المثلث المتساوي الساقين هو الأكبر.

4- من بين كل المثلثات المدرجة في دائرة، محيط المثلث متساوي الأضلاع هو الأكبر.

5- من بين جميع الأشكال، المدرجة داخل نفس الدائرة، التي لها عدد معين من الأضلاع، تكون المساحة الأكبر عندما تكون الأضلاع متساوية.

6- اثبت [لازمة. 3-20-1].

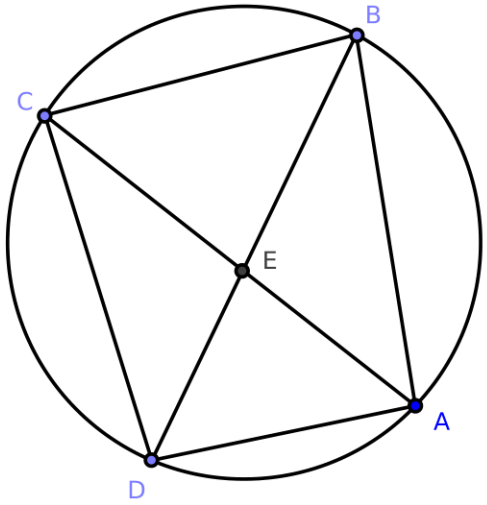
7- اثبت [لازمة. 3-21-1].

8- اثبت [لازمة. 3-21-2].

القضية 3-22. أشكال رباعية مدرجة داخل دوائر.

مجموع أي زاويتين متقابلتين في أي شكل رباعي مدرج في دائرة يساوي زاويتين قائمتين.

الإثبات أنشئ شكل رباعي ABCD مدرج في E●. ندعي أن مجموع أي زاويتين متقابلتين في الشكل ABCD يساوي زاويتين قائمتين.



الشكل 3-2-26: [3-22]

افترض أن π راديان = زاويتين قائمتين، وأنشئ القطرين $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$. بما أنّ ∠ABD و ∠ACD تقفان على القوس AD ، ∠ABD = ∠ACD حسب [3-21]. وعلى نحو مماثل، ∠DAC = ∠DBC ، لأنهما تقفان على القوس DC. بالتالي

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$$

$$= \angle ACD + \angle DAC$$

من هذا، نحصل علي

$$\angle ABC + \angle CDA = \angle ACD + \angle DAC + \angle CDA$$

حيث الجانب الأيمن من المعادلة هو مجموع الزوايا الداخلية لـ ACD▲.

لأن هذا المجموع يساوي π راديان حسب [1-32]،

$$\angle ABC + \angle CDA = \pi \text{ راديان}$$

وعلى نحو مماثل،

$$\angle DAB + \angle BCD = \pi \text{ راديان}$$

(مع مراعاة ما يقتضيه اختلاف الحال)، هذا يثبت ادعاءنا.

اللازمة 3-22-1. إذا كان مجموع أي زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي يساوي زاويتين قائمتين، فيمكن إحاطة الشكل الرباعي بدائرة.

اللازمة 3-22-2. إذا كان متوازي الأضلاع مدرج في دائرة، فهو مستطيل.

تمارين

1- إذا كانت كل زاويتين متقابلتين مكملتين لبعضهما البعض في الشكل الرباعي، فإن الشكل دائري.

2- القطعة التي تصنع زوايا متساوية مع زوج من الأضلاع المتقابلة في شكل رباعي دائري تصنع زوايا متساوية مع الزوج الآخر والقطرين.

3- إذا مد ضلعان متقابلان من الشكل الرباعي الدائري ليتقطعا وأسقط عمودي على منصف الزاوية بينهما من نقطة تقاطع القطرين، فإن العمودي سينصف الزاوية بين القطرين.

4- إذا توازى زوجان من الأضلاع المتقابلة في شكل سداسي دائري، على التوالي، فإن الضلعين المتبقيين (الزوج المتبقي) من الأضلاع متوازيان أيضًا.

5- إذا تقاطعت دائرتان عند النقطتين A و B وأنشئت أي قطعتين $\overline{\mathrm{ACD}}$ ، $\overline{\mathrm{BFE}}$ عبر A و B، قاطعتين إحدى الدائرتين في النقطتين C و E والأخرى في النقطتين D و F، فإن $\overline{\mathrm{CE}} \parallel \overline{\mathrm{DF}}$.

6- إذا أنشئت مثلثات متساوية الأضلاع على أضلاع أي مثلث، فإن القطع التي تصل رؤوس المثلث الأصلي بالرؤوس المقابلة في المثلثات متساوية الأضلاع تتقاطع.

7- في # 6، اثبت أن مراكز الدوائر المنشأة حول المثلثات متساوية الأضلاع تكون مثلثًا متساوي الأضلاع.

8- إذا أنشئ شكل رباعي حول دائرة، فإن الزاويتين الموجودتين عند المركزين الواقفتين مقابل ضلعين متقابلين تكون مكملتين لبعضهما البعض.

9- إذا التقى مماس متحرك مع مماسين متوازيين، فإنه يقف مقابل زاوية قائمة عند المركز.

10- إذا أحاط شكل سداسي دائرة، فإن مجموع الزوايا الواقفة مقابل المركز من أي ثلاثة أضلاع متبادلة يساوي زاويتين قائمتين.

11- اثبت [لازمة. 3-22-1].

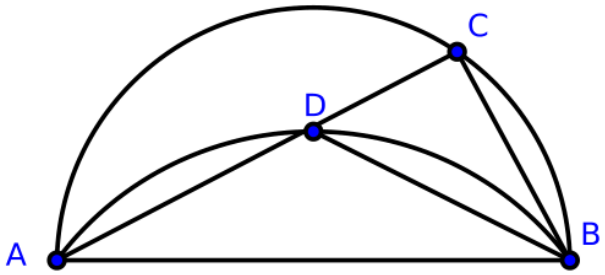
12- بعد الانتهاء من # 11، أعد كتابة نتائج [3-22] و [لازمة. 3-22-1] في قضية.

13- اثبت [لازمة. 3-22-2].

القضية 3-23. تفرد الأقواس.

لا يمكن بناء قوسين متشابهين وغير متساويين على نفس الجانب من نفس الوتر.

الإثبات أنشئ $\overline{AB}$. افترض إنشاء قوسين متشابهين وغير متساويين ACB و ADB على نفس الجانب من $\overline{AB}$. أنشئ $\overline{ADC}$ و $\overline{CB}$ و $\overline{DB}$.



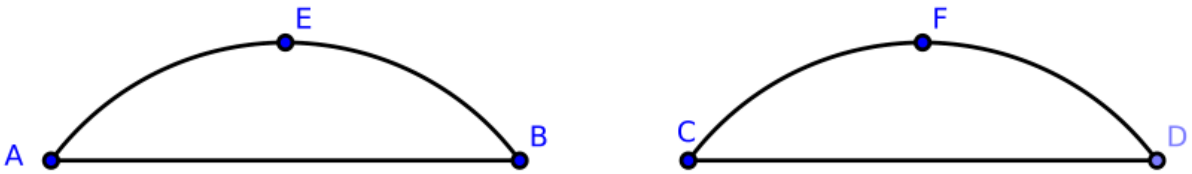
الشكل 3-2-27: [3-23]

بما أن القوس ACB مشابه للقوس ADB، $\angle ACB = \angle ADB$ حسب [تعريف 3-10]؛ هذا يتناقض مع [1-16] ويثبت ادعائنا.

القضية 3-24. تساوي الأقواس المتشابهة.

الأقواس المتشابهة التي تقف على أوتار متساوية تكون متساوية.

الإثبات أنشئ $AB = CD$ والقوسين AEB و CFD بشرط أن $AEB \sim CFD$. ندعي أن $AEB = CFD$.



الشكل 3-2-28: [3-24]

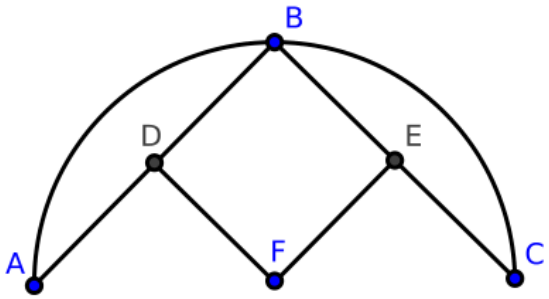
بما أن $AB = CD$، إذا طُبقت $\overline{AB}$ على $\overline{CD}$ بشرط أن تتطابق النقطة A مع C وتتطابق النقطة B مع D، حينها يتطابق الوتر $\overline{AB}$ مع $\overline{CD}$. لأن $AEB \sim CFD$، يجب أن يتطابقا في كل نقطة [3-23]. هذا التناقض يثبت ادعاءنا.

اللازمة 3-24-1. الأوتار المتساوية في الطول، متطابقة أيضًا؛ لذلك فإن الأقواس المتشابهة متطابقة أيضًا.

القضية 3-25. إنشاء دائرة من قوس.

إذا عُلم قوس في أي دائرة، من الممكن إنشاء هذه الدائرة.

الإثبات إذا علمت القوس ABC في F●، أنشئ F●.



الشكل 3-2-29: [3-25]

خذ أي ثلاث نقاط A, B, C على القوس ABC. أنشئ $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$. نصف $\overline{AB}$ عند D و $\overline{BC}$ عند E. أنشئ $\overline{DF} \perp \overline{AB}$ و $\overline{EF} \perp \overline{BC}$. ندعي أن F، نقطة تقاطع $\overline{DF}$ و $\overline{EF}$، هو مركز الدائرة المطلوبة.

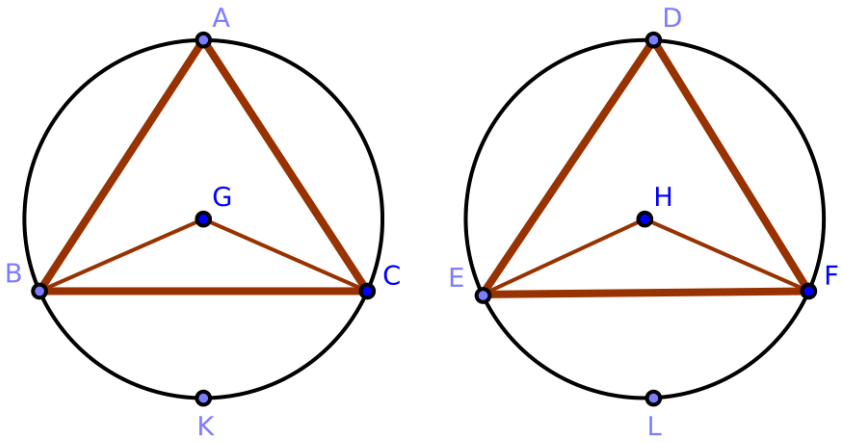
لأن $\overline{DF}$ ينصف ويتعامد مع $\overline{AB}$، فإن مركز الدائرة التي ABC قوسًا فيها يقع على$\overline{DF}$ [3-1، لازمة. 1]. وبالمثل، يقع مركز الدائرة التي ABC قوسًا فيها على $\overline{EF}$.

لأن F هو تقاطع $\overline{DF}$ و $\overline{EF}$، هذا يُكمل إثباتنا.

القضية 3-26. الزوايا والأقواس I.

في الدوائر المتساوية، تقف الزوايا المتساوية عند المركز أو على المحيط على أقواس متساوية.

الإثبات أنشئ الدائرتين المتساويتين G● و H ● والزاويتين المتساويتين عند المركزين: ∠BGC في G● و∠EHF في H●. أيضا أنشئ الزاويتين المتساويتين ∠BAC في G● حيث A على المحيط و∠EDF في H● حيث D على المحيط. ندعي أن القوس BKC = القوس ELF.



الشكل 3-2-30: [3-26]

أنشئ $\overline{BC}$ و$\overline{EF}$ وفي ▲ BGC و ▲ EHF: EH = BG و HF = GC و ∠EHF = ∠BGC. حسب [4-1]، ▲ EHF ≅ ▲ BGC، ولذلك EF = BC.

حسب [3-20] ، $\angle BAC = \frac{1}{2} . \angle BGC$ و $\angle EDF = \frac{1}{2} . \angle EHF$. لأن ∠EHF = ∠BGC حسب الفرضية، ∠EDF = ∠BAC. حسب [تعريف 3-10]، القوس BAC ~ القوس EDF. وحسب [3-24]، القوس BAC = القوس EDF.

حسب [تعريف 3-1] ، G ● و H ● متساويتان في القياس، وبالتالي القوسBKC = قوس ELF. هذا يثبت ادعاءنا.

اللازمة 3-26-1. إذا تساوت زاويتين متقابلتين في شكل رباعي دائري فإن أحد قطريه يجب أن يكون قطر للدائرة المحيطة.

اللازمة 3-26-2. الأوتار المتوازية في دائرة تقطع أقواسًا متساوية.

اللازمة 3-26-3. إذا تقاطع وتران عند أي نقطة داخل دائرة، فإن مجموع القوسين المتقابلين المقطوعين بالوترين يساوي القوس الذي يقطعه الوتران الموازيان للوترين السابقين عندما تكون نقطة تقاطعهما على المحيط.

إذا تقاطع وتران عند أي نقطة خارج دائرة، فإن الفرق بين القوسين المقطوعين يساوي القوس الذي يقطعه الوتران الموازيان للوترين السابقين عندما تكون نقطة تقاطعهما على المحيط.

اللازمة 3-26-4. إذا تقاطع وتران عموديًا، فإن مجموع القوسين المتقابلين المقطوعين في الدائرة هو نصف دائرة.

تمارين

1- اثبت [لازمة. 3-26-1].

2- اثبت [لازمة. 3-26-2].

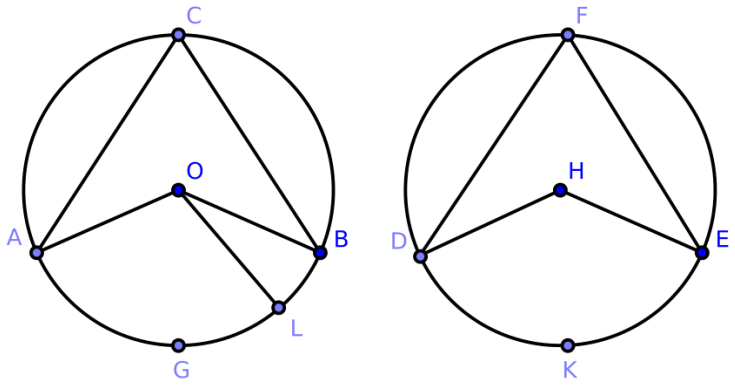
3- اثبت [لازمة. 3-26-3].

4- اثبت [لازمة. 3-26-4].

القضية 3-27. الزوايا والأقواس II.

في الدوائر المتساوية، تكون الزوايا عند المراكز أو على المحيطات، التي تقف على أقواس متساوية، متساوية في القياس.

الإثبات أنشئ الدائرتين المتساويتين G● و H ● وأنشئ الزاويتين المتساويتين عند المركزين (∠AOB، ∠DHE) وعلى المحيطين (∠ACB، ∠DFE) اللتين تقفان على قوسين متساويين (AGB، DKE). ندعي أن: ∠AOB = ∠DHE و ∠ACB = ∠DFE .



الشكل 3-2-31: [3-27]

فيما يخص الزاويتين عند المركزين (∠AOB K∠DHE). افترض أن ∠AOB > ∠DHE و ∠AOL = ∠DHE. لأن الدائرتين متساويتين من جميع النواحي، فإن القوس AGL = القوس DKE [3-26]. لاحظ أن القوس LB > 0.

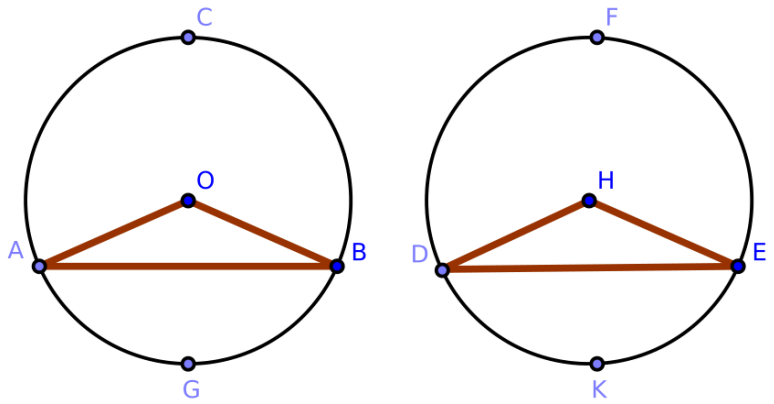
لكن القوس AGB = القوس DKE حسب الفرضية. ولذلك القوس AGB = القوس AGL و
(القوس AGB = القوس AGL ⊕ القوس LB) حيث (القوس LB = 0)، هذا تناقض. تناقض مماثل ينتج إذا افترضنا أن ∠AOB < ∠DHE. لذلك، ∠AOB = ∠DHE.

فيما يخص الزاويتين على المحيطين. لأن ∠AOB = ∠ACB . 2 و ∠DHE = 2 · ∠DFE حسب [3-20]، ∠ACB = ∠DFE . هذا يكمل الإثبات.

القضية 3-28. الأوتار والأقواس I.

في الدوائر المتساوية، تقسم الأوتار ذات الأطوال المتساوية المحيطات إلى أقواس متساوية، على التوالي.

الإثبات أنشئ الدائرتين المتساويتين (O●، H●) والوترين المتساويين ($\overline{AB}$، $\overline{DE}$). ندعي أن: $\overline{AB}$ و $\overline{DE}$ يقسمان محيط O● و H●، على التوالي، بحيث يكون القوس AGB = القوس DKE والقوس ACB = القوس DFE.



الشكل 3-2-32: [3-28]

إذا كانت الأوتار المتساوية أقطار، فإن كل قوس من الأقواس يساوي نصف دائرة، هذا يكمل الإثبات.

خلاف ذلك، أنشئ $\overline{AO}$ و $\overline{OB}$ و $\overline{DH}$ و $\overline{HE}$. لأن الدائرتين متساويتين من جميع النواحي، فإن نصف قطر كل منهما يساوي نصف قطر الأخرى [تعريف 3-1].

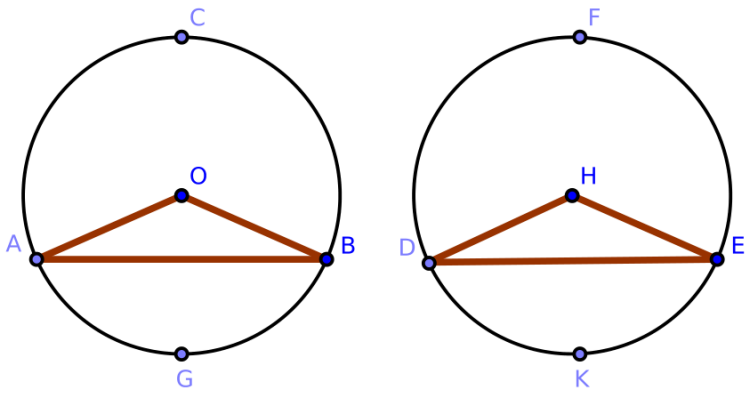
في ▲AOB و▲DHE: AO = HE و OB = DE و AB = DH. حسب [3-8]، ▲AOB ≅ ▲DHE ؛ بالتالي ∠AOB = ∠DHE ، ولذلك القوس AGB = القوس DKE [3-26].

لأن المحيط كله AGBC يساوي في القياس محيط DKEF كله، يترتب على ذلك أن القوس ACB = القوس DFE. هذا يثبت ادعاءنا.

القضية 3-29. الزوايا والأقواس II.

في الدوائر المتساوية، تقف الأقواس المتساوية مقابل أوتار متساوية.

الإثبات أنشئ الدائرتان المتساويتان O● و H● حيث القوس AGB = القوس DKE. ندعي أن: DE = AB.



الشكل 3-2-33: [3-29]

أنشئ $\overline{AO}$ و $\overline{OB}$ و $\overline{DH}$ و $\overline{HE}$. لأن الدائرتين متساويتان في القياس، والزاويتين ∠AOB و∠DHE عند المركزين وتقفان على قوسين متساويين AGB و DKE [3-27].

في ▲AOB و ▲DHE: AO = DH و OB = HE و ∠AOB = ∠DHE. حسب [4-1]، ▲AOB ≅ ▲DHE. لذلك، AB = DE، هذا يثبت ادعاءنا.

اللازمة 3-29-1. القضايا [3-26] - [3-29] مرتبطة بالمعنى التالي: في الدوائر ذات أنصاف الأقطار المتساوية،

1- في [3-26]، الزوايا المتساوية تقتضي أقواسًا متساوية.

2- في [3-27]، تقتضي الأقواس المتساوية زوايا متساوية. معًا، تنص [3-26] و [3-27] على أن الزوايا المتساوية والأقواس المتساوية متكافئتين.

3- في [3-28]، تقتضي الأوتار المتساوية أقواسًا متساوية.

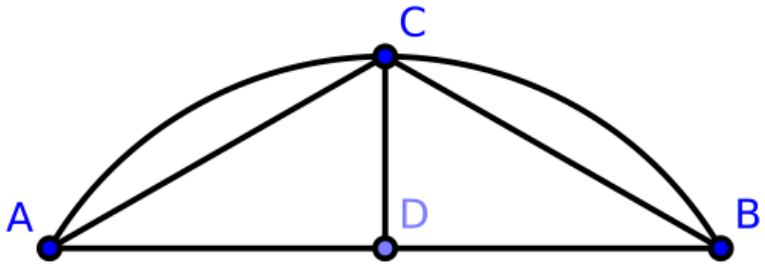
4- في [3-29]، تقتضي الأقواس المتساوية أوتارًا متساوية. معًا، تنص [3-28] و [3-29] أن الأوتار المتساوية والأقواس المتساوية متكافئتين.

أو: في الدوائر ذات أنصاف أقطار المتساوية، أوتار متساوية ⟸⟹ زوايا متساوية ⟸⟹ الزوايا الواقفة على أقواس متساوية.

ملاحظة. لأن الدائرتين في القضايا الأربعة الأخيرة متساويتان، فهما متطابقتان، وتتضح حقيقة القضايا بالتراكب.

القضية 3-30. تنصيف قوس.

الإثبات نرغب في تنصيف القوس المعطى ACB.



الشكل 3-2-34: [3-30]

أنشئ الوتر $\overline{AB}$ ونصفه عند D. أنشئ $\overline{DC} \perp \overline{AB}$، ويتقاطع مع القوس عند C. ندعي أن القوس ACB منصف عند C.

أنشئ $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$، وفي ▲ ADC و ▲ BDC: $AD = DB$، ويشتركان في الضلع $\overline{DC}$ و $\angle ADC = \angle BDC$. حسب [1-4]، ▲ $ADC \cong$ ▲ BDC، ولذلك $AC = BC$.

حسب [3-28]، القوس AC = القوس BC؛ لأن القوس ACB = القوس AC ⊕ القوس BC، القوس ACB مُنصف عند C.

تمارين

1- افترض أن ABCD نصف دائرة قطرها $\overline{AD}$ وفيه الوتر $\overline{BC}$. مد $\overline{BC}$ لإنشاء $\overrightarrow{BC}$ و $\overline{AD}$ لإنشاء $\overrightarrow{AD}$، وافترض أن الشعاعين يتقاطعان عند E. اثبت أنه إذا كانت $\overline{CE}$ تساوي نصف قطر ABCD، فإن القوس $AB = 3 \cdot CD$. [انظر الفصل الأخير للحصول على حل.]

2- يلتقي المنصفان الداخلي والخارجي للزاوية الرأسية لمثلث مدرج في دائرة بالمحيط، مرة أخرى، عند نقاط متساوية البعد عن نهايتي القاعدة.

3- إذا كانت A إحدى نقطتي تقاطع أي دائرتين وأُنشئ الوتران $\overline{ACD}$ و $\overline{AC'D'}$، قاطعين الدائرتين في النقاط C و D و C' و D'، فإن المثلثين ▲ BCD و ▲ $BC'D'$ المتكونين عن طريق توصيل نقاط التقاطع بنقطة تقاطع الدائرتين الثانية B متساويا الزوايا.

4- إذا كانت الزاوية الرأسية $\angle ACB$ لأي مثلث مدرج في دائرة مُنصفة بالخط $\overleftrightarrow{CD}$ الذي يلتقي الدائرة مرة أخرى عند D، ومن D أنشئ العمودان $\overline{DE}$، $\overline{DF}$ إلى الضلعين، أحدهما ممتد، اثبت أن $EA = BF$ وبالتالي فإن $CE = \frac{1}{2}(AC + BC)$.

القضية 3-31. نظرية تاليس.

لأي دائرة،

(1) إذا قُسمت الدائرة إلى نصفين، فإن الزاوية الواقفة على أي من القوسين هي زاوية قائمة؛

(2) إذا قسمت الدائرة إلى قوسين غير متساويين، فإن الزاوية الواقفة على القوس الأصغر هي زاوية حادة؛

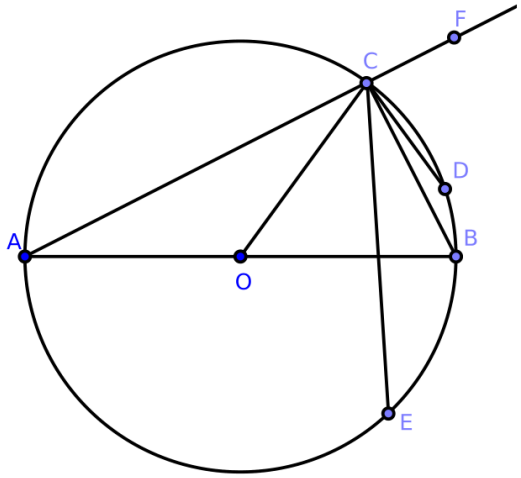
(3) إذا قسمت الدائرة إلى قوسين غير متساويين، فإن الزاوية الواقفة على القوس الأكبر هي زاوية منفرجة.

الإثبات أنشئ O● والقطر $\overline{AB}$ والنقاط C و D و E بشرط أن تكون C و D على نصف دائرة و E على نصف الدائرة الآخر. ندعي أن:

(1) ∠ACB على القوس ACB زاوية قائمة؛

(2) ∠ACE على القوس ACE زاوية حادة؛

(3) ∠ACD على القوس ACD زاوية منفرجة؛



الشكل 3-2-35: [3-31]

الادعاء 1: ACB على القوس ACB زاوية قائمة؛

أنشئ نصف القطر $\overline{OC}$ ومد $\overline{AC}$ لإنشاء $\overrightarrow{AC}$. في ▲AOC: لأن OC = AO، ∠OAC = ∠ACO. وبالمثل في ▲OCB، ∠CBO = ∠OCB. لذلك

$$\angle ACB = \angle ACO + \angle OCB$$

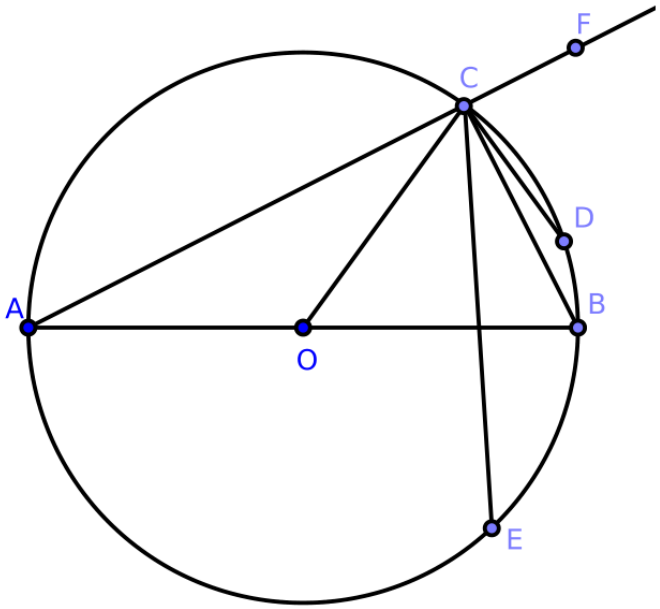
$$= \angle OAC + \angle CBO$$

$$= \angle BAC + \angle CBA$$

في ▲ABC: حسب [1-32]، ∠CBA + ∠BAC = ∠FCB. لذلك، ∠ACB = ∠FCB وهما زاويتان متجاورتان؛ ولذلك، ∠ACB هي زاوية قائمة.

الادعاء 2: ∠ACE على القوس ACE زاوية حادة.

أنشئ $\overline{CE}$. لأن $\angle ACB = \angle ACE + \angle BCE$ ، $\angle ACB > \angle ACE$. لكن اثبتنا أن $\angle ACB$ هي زاوية قائمة. لذلك، $\angle ACE$ حادة.



الشكل 3-2-36: [3-31]

ادعاء 3: $\angle ACD$ في القوس ACD زاوية منفرجة؛

أنشئ $\overline{CD}$. لأن $\angle ACD = \angle ACB + \angle BCD$ ، $\angle ACD > \angle ACB$. لأن $\angle ACB$ زاوية قائمة. $\angle ACE$ منفرجة

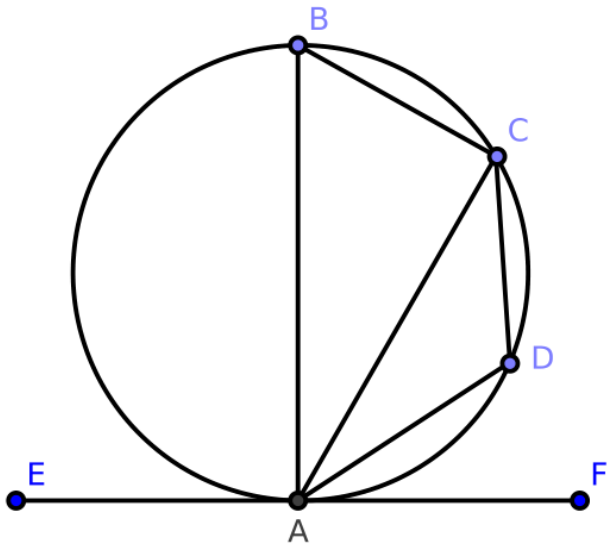
اللازمة 3-31-1. إذا أدرج متوازي أضلاع في دائرة، فإن قطريه يتقاطعان عند مركز الدائرة.

اللازمة 3-31-2. [3-31] تظل صحيحة إذا استبدلت أوتار بأطوال مناسبة بالأقواس، مع إجراء التعديلات اللازمة.

القضية 3-32. الزاوية المحصورة بين الوتر والمماس وعلاقتها بالزاوية المحيطية التي تقف على الوتر.

إذا أنشئ من نقطة تقاطع خط مماس مع دائرة وتر يقطع الدائرة، فإن الزوايا التي يصنعها هذا الوتر مع المماس تساوي على التوالي الزوايا على الأقواس المتبادلة للدائرة.

الإثبات أنشئ $\overleftrightarrow{EF}$ بشرط أن يكون $\overleftrightarrow{EF}$ مماسًا لـ ABC ● عند A. أنشئ الوتر $\overline{AC}$؛ لاحظ أن $\overline{AC}$ تقطع ABC●. ندعي أن الزوايا التي يصنعها هذا الوتر مع المماس تساوي على التوالي زوايا الأقواس المتبادلة للدائرة. سنثبت هذا في حالتين.



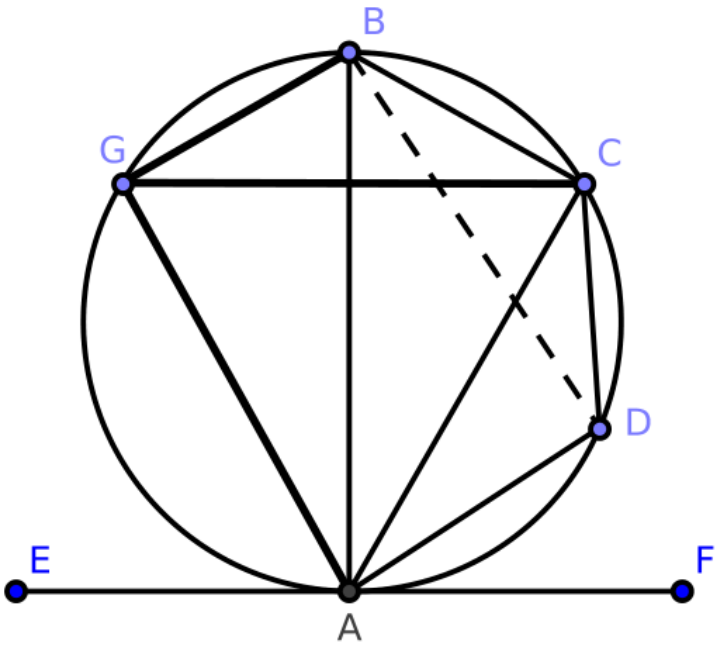
الشكل 3-2-37: [3-32] (α)

الحالة 1: نرغب في إظهار أن $\angle FAC = \angle ABC$ في الشكل (α).

أنشئ $\overline{AB}$ بحيث $\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{EF}$. أنشئ $\overline{BC}$. لأن $\overline{EF}$ مماس لـ ABC● ، من الواضح أن $\overline{AB}$ منشئة عند A و $\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{EF}$ ، حسب [3-19] نجد أن $\overline{AB}$ يمر عبر مركز ABC●. حسب [3-31]، $\angle ACB$ زاوية قائمة؛ بما أن ABC ▲ مثلث، فإن مجموع الزاويتين المتبقيتين $\angle CAB + \angle ABC$، يساوي زاوية قائمة.

لأن $\angle BAF$ زاوية قائمة حسب الإنشاء، $\angle BAF = \angle CAB + \angle ABC$. من هذا نحصل علي $\angle FAC = \angle BAF - \angle CAB = \angle ABC$، هذا يثبت الحالة الأولى.

الحالة الثانية: نرغب في إثبات أن $\angle CDA = \angle CAE$ في الشكل (β).



الشكل 3-2-38: [3-32] (β)

خذ أي نقطة D على القوس AC. بما أن الشكل الرباعي ABCD مدرج في دائرة، فمجموع كل زاويتين متقابلتين ∠CDA + ∠ABC يساوي زاويتين قائمتين [3-22] ولذلك يساوي المجموع ∠CAE + ∠FAC. لكن، ∠FAC = ∠ABC حسب الحالة 1. لذلك ∠CAE = ∠CDA.

هذا يثبت حالتنا الثانية والأخيرة، ويكمل الإثبات.

تمارين

1- في حالة تماس دائرتين، فإن أي خط مُنشأ عبر نقطة التقاطع سيقطع قطوع متشابهة.

2- إذا تماست دائرتان وأنشئ أي خطين عبر نقطة التقاطع (قاطعين كلتا الدائرتين مرة أخرى)، فإن الوتر الذي يصل نقطتي تقاطعهما مع دائرة يكون موازيًا للوتر الذي يصل بين نقطتي تقاطعهما مع الدائرة الأخرى.

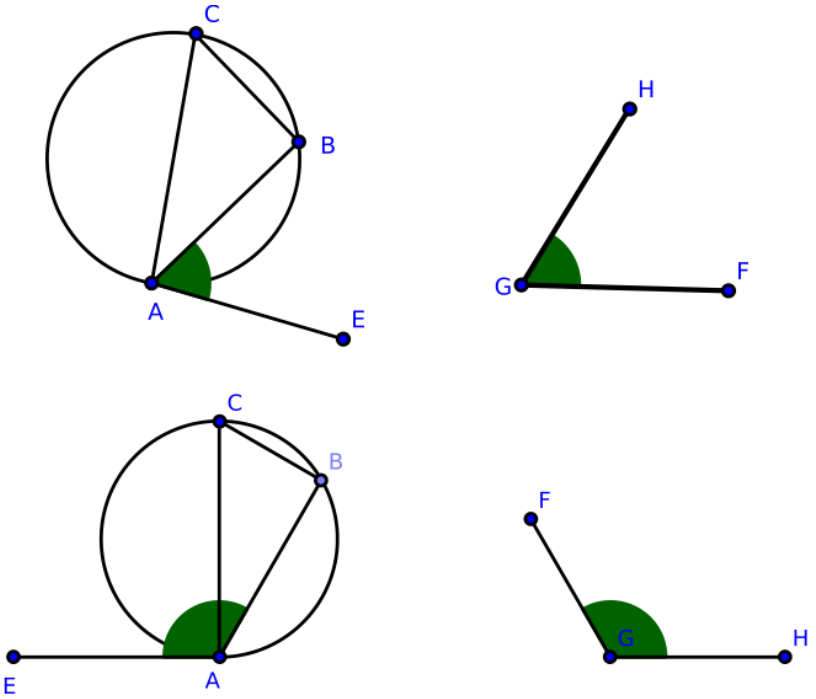
3- افترض أن ACB قوس في دائرة، و $\overleftrightarrow{CE}$ مماس عند C (يلتقي بالوتر $\overline{AB}$ الممتد إلى E)، و $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ حيث D نقطة في $\overline{AB}$. اثبت أنه إذا نُصفت $\overline{DE}$ عند C فإن القوس $AC = 2 \cdot CB$.

4- إذا تماست دائرتان عند نقطة A وإذا كان $\overline{ABC}$ وتر عبر A، ويلتقي بالدائرتين عند النقطتين B و C، فأثبت أن المماسين عند B و C متوازيين، وأنه عندما تكون إحدى الدائرتين داخل الأخرى، فإن المماس عند B يلتقي بالدائرة الخارجية عند نقطتين متساويتي البعد عن C.

5- إذا تماست دائرتان خارجيًا، فإن المماس المشترك بينهما على أي من الجانبين يقف مقابل زاوية قائمة عند نقطة التقاطع، ومربعه يساوي المستطيل المحصور بالقطرين.

القضية 3-33. إنشاء قطع دائري على خط بحيث يحصر القطع زاوية مساوية لأي زاوية.

الإثبات أنشئ $\overleftrightarrow{AB}$ و ∠HGF. على $\overleftrightarrow{AB}$، نرغب في إنشاء قطع دائري يحصر زاوية مساوية لـ ∠HGF.



الشكل 3-2-39: [3-33]

إذا كانت ∠HGF قائمة، أنشئ نصف دائرة على $\overleftrightarrow{AB}$ ليكون القطع المطلوب. حسب [3-31]، يحصر نصف الدائرة زاوية قائمة.

خلاف ذلك، أنشئ ∠BAE = ∠HGF. أنشئ $\overline{AC} \perp \overline{AE}$ و $\overline{BC} \perp \overline{AB}$. لنفترض أن $\overline{AC}$ قطر ●ABC، التي ندعي أنها الدائرة المطلوبة.

لاحظ أن ●ABC فيها B على محيطها لأن ∠ABC قائمة [3-31]. أيضا، ●ABC تمس $\overline{AE}$ لأن ∠CAE زاوية قائمة [3-16]. يترتب على ذلك أن ∠ACB = ∠BAE. لأن ∠BAE = ∠HGF حسب الإنشاء، ∠ACB = ∠HGF.

ولذلك على $\overleftrightarrow{AB}$، أنشأنا قطع من ●ABC مقابل زاوية تساوي ∠HGF.

تمارين

1- أنشئ المثلث، إذا علمت قاعدته وزاويته الرأسية وأي من البيانات التالية:

(أ) عمود.

(ب) مجموع أو فرق أطوال الأضلاع.

(ج) مجموع أو فرق مربعات أطوال الأضلاع.

(د) ضلع المربع المدرج الذي على القاعدة.

(هـ) المتوسط الذي ينصف القاعدة.

2- إذا أنشئت خطوط من نقطة ثابتة إلى جميع نقاط محيط أي دائرة، فأثبت أن المحل الهندسي لجميع نقاط تنصيفها هو دائرة.

3- إذا علمت القاعدة وزاوية الرأس لمثلث، أوجد المحل الهندسي لنقطة منتصف الخط الذي يصل بين رأسي المثلثين المتساويين الأضلاع المنشأين على الجانبين.

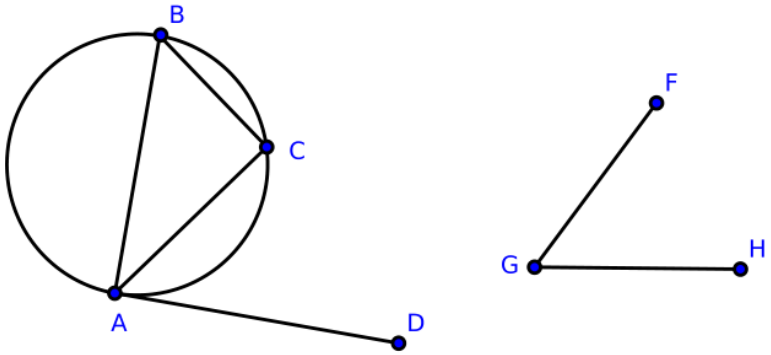
4- لنفس الحالة، جد المحال الهندسية لرؤوس المربع المنشئ على أحد الجانبين.

القضية 3-34.

إنشاء قطع من دائرة بحيث يحصر زاوية محيطية مساوية لأي زاوية.

الإثبات أنشئ ABC ● و ∠HGF. نرغب في إنشاء قطع من ABC● يقابل زاوية محيطية تساوي ∠HGF.

اختر النقطة A على محيط ABC● وأنشئ المماس $\overline{AD}$. على $\overline{AD}$، أنشئ ∠HGF = ∠DAC. ندعي أن القطع AC من ABC● هو القطع المطلوب.



الشكل 3-2-40: [3-34]

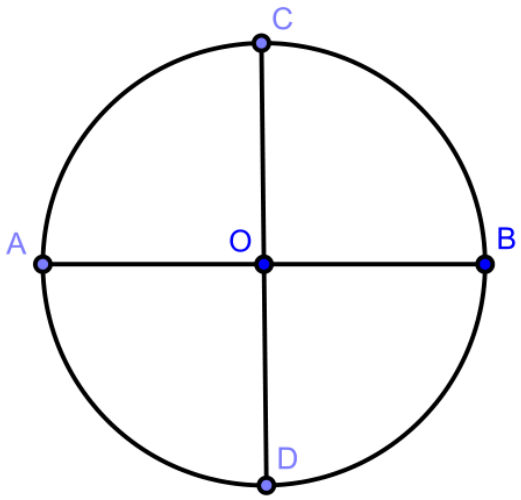
اختر أي نقطة B على محيط ABC● بخلاف القوس AC. أنشئ $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$. حسب [3-32]، ∠ABC = ∠DAC. لكن ∠HGF = ∠DAC حسب الإنشاء، ولذلك ∠ABC = ∠HGF.

وهكذا، أنشأنا قطع من ABC● يقابل زاوية محيطية تساوي ∠HGF.

القضية 3-35. مساحات المستطيلات المنشأة على أوتار.

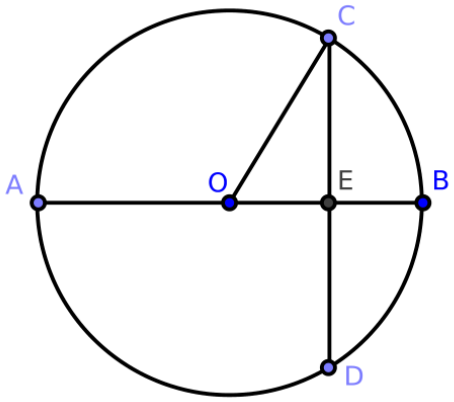
إذا تقاطع وتران عند نقطة في دائرة، فإن مساحة المستطيل المحتوى بالقطعتين الناتجتين من تقسيم الوتر الأول تكون مساوية لمساحة المستطيل المحتوى بالقطعتين الناتجتين من تقسيم الوتر الثاني [تعريف 2-4].

الإثبات أنشئ ●O التي فيها الوتران $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ المتقطعين عند نقطة. ندعي أن المستطيلين المحصورين بجزأي كل من الوترين متساويان في المساحة وسنثبت هذا الادعاء في أربع حالات.



الشكل 3-2-41: [3-35]، الحالة 1

الحالة 1: إذا كانت نقطة التقاطع مركز ●O، $OC = DO = OB = AO$. لذلك، $AO \cdot OB = DO \cdot OC$.



الشكل 3-2-42: [3-35]، الحالة 2

الحالة 2: افترض أن $\overline{AB}$ تمر عبر O وأن $\overline{CD}$ لا تمر؛ افترض أيضًا أنهما يتقاطعان عند E و $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.

أنشئ $\overline{OC}$. لأن $\overline{AB}$ مقسمة بالتساوي عند O و على غير تساوي عند E، حسب [5-2]

$$AE \cdot EB + (OE)^2 = (OB)^2$$

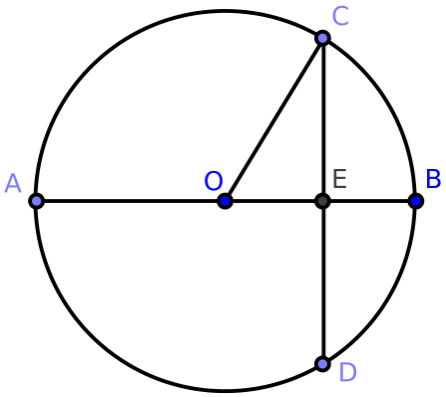
بما أن $OB = OC$،

$$AE \cdot EB + (OE)^2 = (OC)^2$$

لكن $(OC)^2 = (OE)^2 + (EC)^2$ حسب [1-47]، وبالتالي

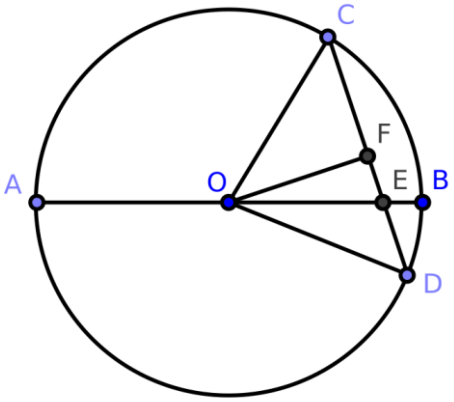
$$AE \cdot EB + (OE)^2 = (OE)^2 + (EC)^2$$

$$AE \cdot EB = (EC)^2$$



الشكل 3-2-43: [3-35]، الحالة 2

لأن $\overline{AB}$ تمر عبر المركز وتقطع $\overline{CD}$، التي لا تمر عبر المركز بزاوية قائمة، و $\overline{AB}$ تنصف $\overline{CD}$ حسب [3-3]. لذلك $(EC)^2 = CE \cdot ED$ ، وبالتالي، $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.



الشكل 3-2-44: [3-35]، الحالة 3

3- أنشئ القطر $\overline{AB}$ لـ O● والذي يقطع $\overline{CD}$ بحيث $\overline{AB}$ ليست عمودية على $\overline{CD}$.

أنشئ $\overline{OC}$ و $\overline{OD}$ و $\overline{CD} \perp \overline{OF}$ [1-11]. لأن $\overline{CD}$ مقطوعة عموديًا بـ $\overline{OF}$ حيث تمر $\overline{OF}$ عبر O، $\overline{CD}$ مُنصفة عند F [3-3] ومقسمة بغير تساوي عند E. حسب [2-5]، $(FD)^2 = (FE)^2 + CE \cdot ED$.

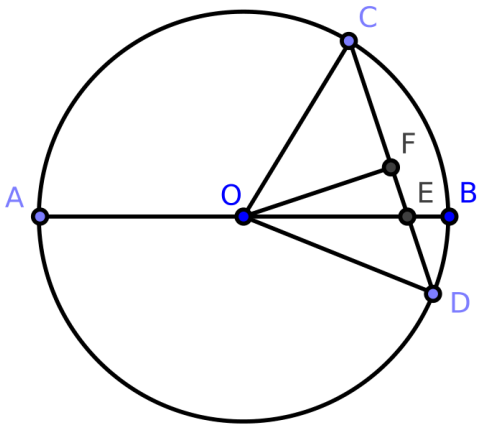
بإضافة $(OF)^2$ إلى كل طرف من المعادلة وتطبيق [1-47]، نحصل على:

$$CE \cdot ED + (FE)^2 + (OF)^2 = (FD)^2 + (OF)^2$$

$$CE \cdot ED + (OE)^2 = (OD)^2$$

$$CE \cdot ED + (OE)^2 = (OB)^2$$

مرة أخرى، لأن $\overline{AB}$ منصفة عند O ومقسمة بغير تساوي عند E، $AE \cdot EB + (OE)^2 = (OB)^2$ [5-2].



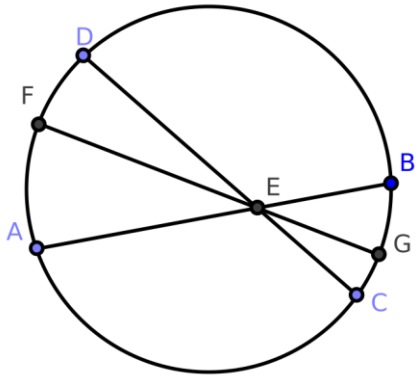
الشكل 3-2-45: [3-35]، الحالة 3

يترتب على ذلك أن

$$CE \cdot ED + (OE)^2 = AE \cdot EB + (OE)^2$$

$$CE \cdot ED = AE \cdot EB$$

4- افترض أن كلا الوترين لا يمران عبر المركز وأنهما يتقاطعان عند E.



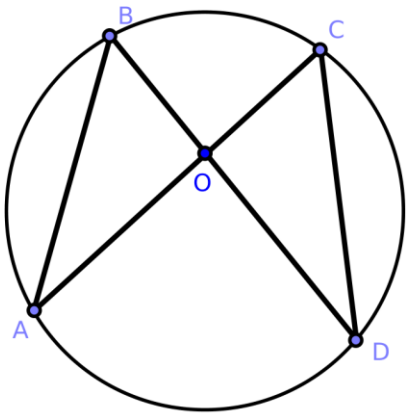
الشكل 3-2-46: [3-35]، الحالة 4

عبر E، أنشئ القطر $\overline{FG}$. حسب الحالة 3، المستطيل $AE \cdot EB = FE \cdot EG$ و $CE \cdot ED = FE \cdot EG$. لذلك، $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

اللازمة 3-35-1. إذا قُسم وتر لدائرة عند أي نقطة داخل الدائرة، فإن المستطيل المحصور بجزئيه يساوي الفرق بين مربع نصف القطر ومربع القطعة المنشأة من المركز إلى نقطة التقسيم.

اللازمة 3-35-2. إذا كان المستطيل المحتوى بجزئي قطعة من القطعتين المتقاطعتين مساويًا للمستطيل المحتوى بجزئي القطعة الأخرى، فإن نهايات القطعتين الأربعة تكون على دائرة.

اللازمة 3-35-3. لأي المثلثين متساويي الزوايا، المستطيل المحتوى بضلعين غير متناظرين حول أي زاويتين متساويتين متساويان.



الشكل 3-2-47: [3-35]، لازمة 3

الإثبات لنفترض أن ABO ▲ و DCO ▲ هما المثلثان متساويا الزوايا، وافترض وضعهما بحيث تكون الزوايا المتساوية عند O متقابلة رأسيًا وأن الضلعين غير المتناظرين، $\overline{AO}$ و $\overline{CO}$، يكونان القطعة $\overline{CA}$. عندها الضلعين غير المتناظرين $\overline{BO}$، $\overline{OD}$ يكونان القطعة $\overline{BD}$. بما أنّ $\angle ACD = \angle ABD$، النقاط A، B، C، D تقع على دائرة [3-21، لازمة. 1]. ومن ثم، $AO \cdot OC = BO \cdot OD$ [3-35].

تمارين

1- في أي مثلث، يكون المستطيل المحتوي بأي ضلعين مساويًا لمساحة المستطيل المحتوى بالعمود على الضلع الثالث وقطر الدائرة المحيطة.

2- المستطيل المحتوى بوتر قوس ووتر مكمله يساوي المستطيل المحتوى بنصف القطر ووتر ضعف مكمله.

3- إذا عُلِمَت قاعدة المثلث ومجموع أضلاعه، عُلم المستطيل المحتوى بالعمودين من نهايتي القاعدة على المنصف الخارجي للزاوية الرأسية.

4- إذا عُلِمَت القاعدة والفرق بين الأضلاع، عُلم المستطيل المحتوى بالعمودين من نهايتي القاعدة على المنصف الداخلي.

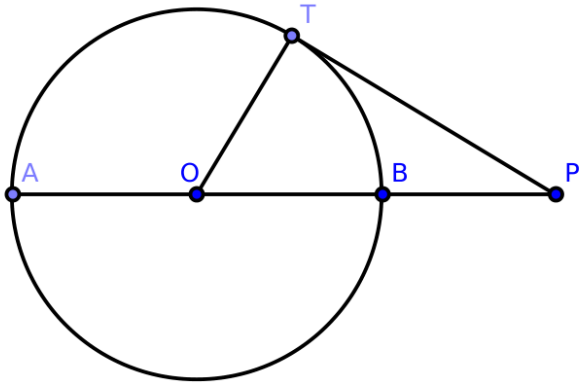
5- عبر إحدى نقطتي تقاطع دائرتين، أنشئ قاطع بشرط أن يُعلم المستطيل المحتوي بالوترين المقطوعين، أو يكون الأقصى.

6- إذا وصلنا AF و BF، نجد أن المستطيل $AF \cdot FB$ يساوي مساحة المستطيل المحتوى بنصف القطر و $2 \cdot FI$؛ أي أنه يساوي المستطيل المحتوى بنصف القطر ومجموع CF و BG.

القضية 3-36. مساحة المستطيلات المنشأة على مماس ونقطة خارج الدائرة.

لأي دائرة ونقطة خارج الدائرة، إذا أنشئت قطعتين من النقطة إلى الدائرة، وكانت إحداهما تتقاطع مع الدائرة في نقطتين والأخرى مماس للدائرة، فإن مساحة المستطيل المحتوى بالقطعتين الجزئيتين من القطعة الأولى تساوي المربع على المماس.

الإثبات أنشئ O● والنقطة P خارج O●. ثم أنشئ المماس $\overline{PT}$ إلى O● عند T؛ أنشئ أيضًا $\overline{PA}$ بشرط أن تتقاطع $\overline{PA}$ مع الدائرة عند B ومرة أخرى عند A. ندعي أن $AP \cdot BP = (PT)^2$. نثبت هذا الادعاء في حالتين.



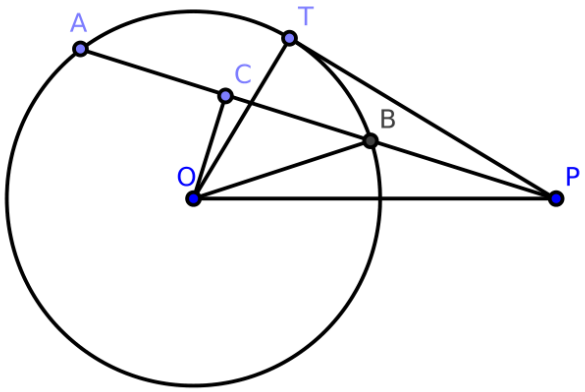
الشكل 3-2-48: [3-36]، الحالة 1

الحالة 1: $\overline{PA}$ تمر عبر O.

أنشئ $\overline{OT}$. لأن $\overline{AB}$ مُنصفة عند O وخارجيًا عند P، فإن $AP \cdot BP + (OB)^2 = (OP)^2$ [6-2]. لأن $\overline{PT}$ مماس لـ O● و $\overline{OT}$ منشأة من المركز إلى نقطة التقاطع، ∠OTP قائمة [3-18]. ومن ثم $(OP)^2 = (PT)^2 + (OT)^2$ حسب [1-47].

لذلك، $AP \cdot BP + (OB)^2 = (PT)^2 + (OT)^2$. لكن $(OB)^2 = (OT)^2$، ولذلك $AP \cdot BP = (PT)^2$.

الحالة 2: $\overline{PA}$ لا تمر عبر O.



الشكل 3-2-49: [3-36]، الحالة 2

أنشئ العمود $\overline{AB} \perp \overline{OC}$ ؛ أيضا أنشئ $\overline{OT}$، $\overline{OB}$، $\overline{OP}$. لأن $\overline{OC}$، قطعة عبر المركز، تقطع $\overline{AB}$ التي لا تمر عبر المركز عموديًا، $\overline{OC}$ يُنصف $\overline{AB}$ [3-3].

لأن $\overline{AB}$ مُنصف عند C ومقسم خارجيًا عند P، نجد أن $AP \cdot BP + (CB)^2 = (CP)^2$ [6-2]. بإضافة $(OC)^2$ إلى كل جانب، نحصل على:

$$AP \,.\, BP + (CB)^2 + (OC)^2 = (CP)^2 + (OC)^2$$

$$AP \,.\, BP + (OB)^2 = (OP)^2$$

لدينا أيضًا أن $(OP)^2 = (OT)^2 + (PT)^2$، ويترتب على ذلك أن

$$AP \,.\, BP + (OB)^2 = (OT)^2 + (PT)^2$$

بما أن $OB = OT$، $(OB)^2 = (OT)^2$، ولذلك $AP \cdot BP = (PT)^2$.

ملاحظة. يمكن كتابة القضيتين [3-35] و [3-36] في شكل عبارة واحدة: المستطيل $AP \cdot BP$ المحتوى بقطعتي أي وتر لأي دائرة ويمر عبر نقطة ثابتة P، سواء داخل أو خارج الدائرة، ثابت.

الإثبات افترض أن O مركز الدائرة، أنشئ $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ و $\overline{OP}$. لاحظ أن OAB ▲ متساوي الساقين، و $\overline{OP}$ قطعة منشأة من رأسه إلى النقطة P في القاعدة أو امتدادها.

يترتب على ذلك أن المستطيل $AP \cdot BP$ يساوي الفرق بين مربعي OB وOP؛ لذلك، فهو ثابت.

اللازمة 3-36-1. إذا مدت القطعتين $\overline{AB}$، $\overline{CD}$ لتلتقيا عند P، وإذا كان المستطيل $AP \cdot BP = CP \cdot DP$، تكون النقاط A و B و C و D على دائرة (قارن [3-35، لازمة. 2]).

اللازمة 3-36-2. المماسان لدائرتين من أي نقطة في الوتر المشترك متساويان (قارن [3-17، # 6]).

اللازمة 3-36-3. الأوتار المشتركة لأي ثلاث دوائر متقاطعة تتقاطع (قارن [3-17، # 7]).

تمارين

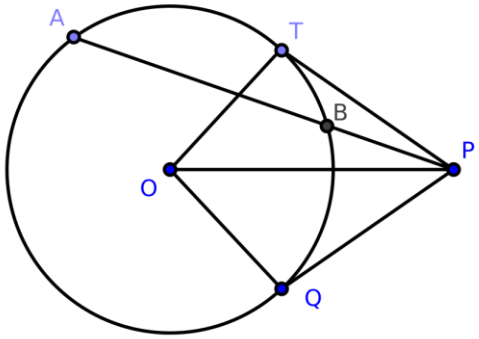
1- إذا أنشئت القطعة $\overline{AD}$ من الرأس A لـ ABC ▲ الذي يقطع $\overline{CB}$ الممتدة إلى D ويصنع الزاوية $\angle BAD = \angle ACB$، أثبت أن $(DA)^2 = DB \cdot DC$.

2- اثبت [لازمة. 3-36-1].

القضية 3-37. مساحة المستطيلات المنشأة على مماس ونقطة خارج الدائرة II.

لأي دائرة ونقطة خارج الدائرة. إذا أنشئت قطعتين من النقطة إلى الدائرة، تتقاطع أولهما مع الدائرة في نقطتين، ومساحة المستطيل المحتوى بالقطعتين الجزئيتين للقطعة الأولى يساوي المربع الموجود على القطعة الثانية، عندها تكون الثانية مماس للدائرة.

الإثبات إذا كان المستطيل (AP · BP) المحتوي بجزئي القاطع والمنشأتين من أي نقطة (P) خارج الدائرة (O●) يساوي مساحة المربع الموجود على القطعة ($\overline{PT}$) المنشأة من نفس النقطة لتقابل الدائرة، ندعي أن هذه القطعة، التي تلتقي بالدائرة، مماس لتلك الدائرة.



الشكل 3-2-50: [3-37]

من P، أنشئ $\overline{PQ}$ التي تمس O● [3-17]. أنشئ $\overline{OP}$، $\overline{OQ}$، $\overline{OT}$. حسب الفرضية، $AP \cdot BP = (PT)^2$؛ حسب [3-36]، $AP \cdot BP = (PQ)^2$. ومن ثم $(PT)^2 = (PQ)^2$، وبالتالي $PT = PQ$.

في المثلثين ▲OTP و ▲OQP: $OT = OQ$ و $QP = TP$ ويتشاركان القاعدة $\overline{OP}$. حسب [1-8]، ▲OTP ≅ ▲OQP، ولذلك $\angle OTP = \angle OQP$.

لكن $\angle OQP$ قائمة لأن $\overline{PQ}$ مماس [3-38]؛ بالتالي $\angle OTP$ قائمة، ولذلك فإن $\overline{PT}$ مماس لـ O● [3-16].

اللازمة 3-37-1. لنفترض أننا أُعطينا دائرة ونقطة خارج الدائرة وأنشئت قطعتين من النقطة إلى الدائرة، تتقاطع أولهما مع الدائرة عند نقطتين. تكون الثانية مماسًا للدائرة، إذا وفقط إذا، كانت مساحة المستطيل المحتوى بالقطعتين الجزئيتين للقطعة الأولى مساوي للمربع الموجود على المماس.

تمارين

1- أنشئ دائرة تمر عبر أي نقطتين وتحقق الشرطين التاليين:

(أ) تمس أي خط؛

(ب) تمس أي دائرة.

2- أنشئ دائرة عبر أي نقطة وتمس أي خطين؛ أو تمس أي خط وأي دائرة.

3- أنشئ دائرة تمر عبر أي نقطة بحيث يكون مركزها على أي خط وتمس أي دائرة.

4- أنشئ دائرة عبر أي نقطتين وتقطع قوس لأي دائرة.

5- إذا كانت A، B، C، D أربع نقاط متسامتة وكانت $\overline{EF}$ مماس مشترك للدائرتين اللتين قطراهما $\overline{AB}$، $\overline{CD}$ ،عندها اثبت أن المثلثين AEB ▲، CFD ▲ متساويا الزوايا.

أسئلة الامتحان للفصل 3.

1- ما موضوع الفصل 3؟

2- عرف الدوائر المتساوية.

3- عرف الوتر.

4- متى يصبح القاطع مماسًا؟

5- ما الفرق بين القوس والقطاع؟

6- ما المقصود بزاوية القطع؟

7- إذا كان قوس الدائرة يساوي سدس المحيط كله فما مقدار زاويته؟

8- ما هي القطوع؟

9- ما المقصود بزاوية واقفة على قطع؟

11- ما هو الشكل الرباعي الدائري؟

12- كم عدد التقاطعات الممكنة بين خط ودائرة؟

13- كم عدد نقاط التقاطع الممكنة بين دائرتين؟

14- لماذا إذا تماست دائرتان في نقطة لا يمكن أن يكون لهما أي نقطة مشتركة أخرى؟

15- اذكر قضية تشمل [3-11] و [3-12].

16- ما القضية التي #16 حالة حدية لها؟

17- ما التعريف الحديث للزاوية؟

18- كيف يختلف التعريف الحديث للزاوية عن تعريف اقليدس؟

19- اذكر العلاقات بين [3-16] و [3-18] و [3-19].

20- ما هي القضايا التي [3-16] و [3-18] و [3-19] حالات حدية لها؟

21- كم عدد المماسات المشتركة الممكنة لدائرتان؟

22- ما مقدار مستطيل جزئي الوتر المنشأ عبر نقطة تبعد 3.65 م عن مركز دائرة نصف قطرها 4.25 م؟

24- لأي نقطة خارج محيط دائرة قطرها 7920 ميل وعلى بعد h أقدام من المحيط، أثبت أن طول المماس المنشأ منها إلى الدائرة هو $\sqrt{\frac{3h}{2}}$ ميل.

25- وتران متوازيان لدائرة قياسهما 12 بوصة و16 بوصة على التوالي والمسافة بينهما 2 بوصة. أوجد طول القطر.

26- ما المحل الهندسي لمراكز جميع الدوائر التي تلامس أي دائرة في أي نقطة؟

27- ما الشرط الذي يجب استيفاءه حتى تمر دائرة بأربع نقاط؟

28- إذا كانت الزاوية على قطع من دائرة تساوي 1.5 زاوية قائمة، فأي جزء المحيط يكون القطع؟

29- اذكر مقلوب قضايا الفصل 3 المثبتة مباشرةً.

30- ما المحل الهندسي لنقاط المنتصف لأوتار متساوية في الدائرة؟

31- إذا كان نصفي قطر أي دائرتين هما 6 و 8، والمسافة بين مركزيهما هي 10. أوجد طول وترهم المشترك.

32- إذا كان شكل ذو عدد زوجي من الأضلاع مدرج في دائرة، اثبت أن مجموع مجموعة من الزوايا المتبادلة يساوي مجموع الزوايا المتبقية.

تمارين الفصل 3

1- إذا تقاطع وتران في دائرة عموديًا، فإن مجموع مربعات أجزاءهما يساوي مربع القطر.

2- إذا وقف وتر من أي دائرة مقابل زاوية قائمة عند نقطة ثابتة، فإن مستطيل العمودين عليها من النقطة الثابتة ومن مركز الدائرة يكون ثابتًا. أيضًا، مجموع مربعي العمودين عليه من نقطتين ثابتتين أخريين (والتي يمكن العثور عليهما) ثابت.

3- إذا أنشئ خط عبر إحدى نقطتي تقاطع دائرتين متساويتين بشرط أن يلتقي بهما مرة أخرى في نقطتين، فإن هاتين النقطتين متساويتي البعد عن نقطة التقاطع الأخرى.

4- أنشئ مماس لدائرة بشرط أن يكون المثلث المتكون منه ومماسان ثابتان للدائرة:

(أ) الأقصى

(ب) الأدنى.

5- إذا أنشئت عبر نقطتي التقاطع A و B لأي دائرتين أي قطعتين $\overline{ACD}$، $\overline{BEF}$ بالتوازي مع بعضهما البعض ويلتقيان بالدائرتين مرة أخرى عند C، D، E، F، عندها نجد أن $CD = EF$.

6- في كل مثلث، يكون منصف الزاوية الأكبر أصغر منصف.

7- الدوائر التي أقطارها الأضلاع الأربعة لأي رباعي دائري تتقاطع مرة أخرى في أربع نقاط تمر بها دائرة.

8- تحدد الرؤوس الأربع للشكل الرباعي الدائري أربعة مثلثات تشكل مراكزها العمودية (تقاطعات ارتفاعاتها) رباعيًا مساويًا للرباعي الأول.

9- إذا أنشئنا وترين مشتركين عبر إحدى نقطتي تقاطع دائرتين، فإن القطع التي تصل بين نهايتي هذه الأوتار تشكل زاوية معينة مع بعضها البعض.

10- إن المربع الموجود على العمودي من أي نقطة في محيط الدائرة على وتر التماس بين مماسين يساوي مستطيل العمودين من نفس النقطة على المماسين.

12- لأي أربع دوائر مبنية على أضلاع شكل رباعي بحيث تكون الأضلاع أقطار هذه الدوائر. اثبت أن الوتر المشترك لأي ضلعين متجاورين يوازي الوتر المشترك للضلعين الآخرين.

13- المستطيل المحتوى بالعمودين من أي نقطة في دائرة على أقطار شكل رباعي مدرج تساوي المستطيل المحتوى بالعمودين من نفس النقطة على أي ضلعين متقابلين.

15- إذا أنشئنا من A، إحدى نقطتي تقاطع دائرتين، أي خط $\overleftrightarrow{ABC}$ يقطع الدائرتين مرة أخرى في B و C، فإن المماسين يتقاطعان عند B و C بزاوية معينة.

16- إذا مر وتر لأي دائرة عبر أي نقطة، فإن المحل الهندسي لتقاطع المماسان عند النهايتين هو خط مستقيم.

18- اذكر واثبت القضية المشابهة لـ [3-17] للمنصف الخارجي للزاوية الرأسية.

19- المربع على القطر الخارجي لشكل رباعي دائري يساوي مجموع المربعين على المماسين من نهايتيه إلى الدائرة المحيطة.

20- إذا مست دائرة "متحركة" أي دائرة وخط، فإن وتر التماس يمر عبر نقطة معينة.

21- إذا كانت A، B، C ثلاث نقاط على محيط دائرة، و D، و E هما نقطتي المنتصف للقوسين AB، AC، وإذا تقاطعت القطعة $\overline{DE}$ مع الوترين $\overline{AB}$، $\overline{AC}$ عند F و G، فإن $AF = AG$.

22- إذا أُدرجت دائرة في شكل رباعي دائري، فإن الخطين الواصلين بين نقاط الاتصال متعامدان.

23- إذا أنشئ الوتر الأصغر من نقطة تقاطع قطري رباعي دائري، فإن هذه النقطة ستنصف جزء الوتر بين الضلعين المتقابلين للشكل الرباعي.

24- إذا علمت قاعدة المثلث وزاويته الرأسية والمنصف الداخلي أو الخارجي للزاوية الرأسية، أنشئ المثلث.

25- إذا أنشئنا، خلال نقطة المنتصف A لأي قوس BAC، أي وتر $\overline{AD}$ قاطعًا BC عند E، فإن المستطيل $AE \cdot AD$ قيمة ثابتة.

26- الدوائر الأربعة المحيطة بالمثلثات الأربعة المكونة من أربعة خطوط تمر عبر نقطة مشتركة.

27- إذا كانت X، Y، Z ثلاث نقاط على الأضلاع الثلاثة للمثلث ABC ▲، فإن الدوائر الثلاثة حول المثلثات YAZ ▲، ZBX ▲، XCY ▲ تمر عبر نقطة مشتركة.

28- إذا أعطيت موضع النقطة المشتركة في التمرين السابق، ستكون الزوايا الثلاث للمثلث XYZ ▲ معلومة، والعكس بالعكس.

29- ضع أي مثلث بشرط أن تمر أضلاعه الثلاث عبر أي ثلاث نقاط.

30- ضع أي مثلث بشرط أن تكون رؤوسه الثلاثة على أي ثلاثة خطوط.

31- أنشئ أكبر مثلث زواياه مساوية لزوايا أي مثلث، على الترتيب، بشرط أن تمر أضلاعه عبر أي ثلاث نقاط.

32- أنشئ أصغر مثلث زواياه مساوية لزوايا أي مثلث، بشرط أن تقع رؤوسه على أي ثلاثة خطوط.

33- أنشئ أكبر مثلث زواياه مساوية لزوايا أي مثلث، بشرط أن تمس أضلاعه أي ثلاث دوائر.

34- إذا مر ضلعان لأي مثلث عبر نقطتين ثابتتين، فإن الضلع الثالث يلامس دائرة ثابتة.

35- إذا مس ضلعان من أضلاع مثلث دائرتين ثابتتين، فإن الضلع الثالث يمس دائرة ثابتة.

36- أنشئ مثلث متساوي الأضلاع رأسه عند أي نقطة ونهايتي قاعدته على أي دائرة.

37- أنشئ مثلث متساوي الأضلاع رأسه عند أي نقطة ونهايتي قاعدته على أي دائرتين.

38- ضع أي مثلث، بشرط أن تمس أضلاعه الثلاث ثلاث دوائر.

39- أحط مربع حول أي شكل رباعي.

40- ادرج مربع في أي شكل رباعي.

41- أنشئ الدوائر التالية:

(أ) العمودية (تقطع بزاوية قائمة) على أي دائرة وتمر عبر أي نقطتين؛

(ب) عمودية على دائرتين أخريين، وتمر عبر أي نقطة؛

(ج) عمودية على ثلاث دوائر أخريات.

42- إذا أنشئنا من نهايتي قطر لنصف دائرة $\overline{AB}$ وترين $\overline{AD}$ و $\overline{BE}$ اللذين يلتقيان عند C، فسنجد أن $. AC . AD + BC . BE = (AB)^2$

43- إذا كان ABCD رباعي دائري، وإذا أنشئنا أي دائرة تمر عبر النقطتين A و B، وأخرى عبر B و C، وثالثة عبر C و D، ورابعة عبر D و A، فإن هذه الدوائر تتقاطع على التوالي عند أربع نقاط أخرى E، F، G، H، والتي تشكل رباعيًا دائريًا آخر.

44- إذا كان ABC ▲ مثلث متساوي الأضلاع، فما هو المحل الهندسي لنقطة M، إذا كانت $MA = MB + MC$

45- في أي مثلث، إذا علمت مجموع أو الفرق بين أي ضلعين والزاوية المكونة بهذين الضلعين من حيث القياس والموضع، فإن المحل الهندسي لمركز الدائرة المحيطة هو خطًا مستقيمًا.

46- أنشئ دائرة:

(أ) عبر أي نقطتين تنصفان محيط دائرة أخرى؛

(ب) عبر أي نقطة تنصف محيط أي دائرتين.

47- أوجد المحل الهندسي لمركز دائرة تنصف محيط أي دائرتين.

48- أنشئ دائرة تنصف محيط أي ثلاث دوائر.

49- إذا كان $\overline{CD}$ عمودي من أي نقطة C في نصف الدائرة على القطر $\overline{AB}$، EFG● تمس $\overline{DB}$ عند E و $\overline{CD}$ عند F ونصف الدائرة عند G، اثبت أن:

(أ) النقاط A، F، G متسامتة؛

(ب) $AC = AE$.

50- إذا أعطيت مثلث منفرج الزاوية، أنشئ من الزاوية المنفرجة إلى الضلع المقابل قطعة تقسم الضلع إلى جزأين مربعهما يساوي المستطيل المحتوى بجزأي الضلع المقابل.

51- إذا كانت O نقطة خارج دائرة مركزها E وكانت القطعتان المتعامدتان المارتان عبر O يقطعان الوترين $\overline{AB}$، $\overline{CD}$، اثبت أن $(AB)^2 + (CD)^2 + 4 \cdot (OE)^2 = 8 \cdot (R)^2$.

52- مجموع المربعات على أضلاع المثلث يساوي ضعف مجموع المستطيلات المُحتويات بكل عمود والجزء بين الرأس المناظر والمركز العمودي. وأيضًا يساوي $12 \cdot (R)^2$ مطروحًا منه مجموع مربعات المسافات من المركز العمودي إلى الرؤوس.

الفصل 4

الفصل 6